

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Акопян Лоран Ваганович

**Томографические методы
в квантовой механике и в квантовой оптике**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Манько Владимир Иванович

Долгопрудный – 2015

Содержание

Обозначения и сокращения	4
Введение	6
Глава 1. Вероятностное представление квантовых состояний . . .	14
1.1. Квантовая механика и оптика на фазовой плоскости	15
1.2. Томография классических непрерывных систем	24
1.3. Томография квантовых непрерывных систем	27
1.4. Принцип суперпозиции в вероятностном представлении	36
1.5. Соотношения неопределенностей в квантовой томографии	39
1.6. Основные выводы и результаты	40
Глава 2. Квантовая томография спиновых состояний	41
2.1. Томография классических дискретных систем	42
2.2. Томография спиновых состояний	47
2.3. Унитарная томография кудита	56
2.4. Сепарабельные и запутанные состояния	59
2.5. Томографические энтропии мультикудитных состояний	67
2.6. Основные выводы и результаты	78
Глава 3. Неравенства БКХШ в квантовой томографии	79
3.1. Томографический вывод неравенств БКХШ	84
3.2. Неравенства типа БКХШ в системе кубит-кутрит	99
3.3. Неравенства типа БКХШ в система из двух кутритов	101
3.4. Неравенства типа БКХШ в система из трех кубитов	103
3.5. Связь томографической энтропии с неравенствами БКХШ	105
3.6. Основные выводы и результаты	108

Глава 4. Вероятностное представление сжатых состояний	109
4.1. Сжатые состояния электромагнитного поля	110
4.2. Общая томография сжатых состояний	116
4.3. Симплектическая томография двухмодовых сжатых состояний ва- куума	121
4.4. Томография центр масс двухмодового сжатого вакуума	123
4.5. Томография счета фотонов для двухмодового сжатого вакуума . .	126
4.6. Основные выводы и результаты	129
Заключение	130
Приложение А. Математическое дополнение	133

Обозначения и сокращения

в.ф. — волновая функция

к.г.о. — квантовый гармонический осциллятор

ф.в. — функция Вигнера

м.п. — матрица плотности

о.п. — оператор плотности

КВТ — квантовая томограмма или квантовая томография

КЛС — классическая томограмма или классическая томография

СТ — симплектическая томограмма

СПТ — спиновая томограмма

ОТ — оптическая томограмма

ТЦМ — томограмма центра масс

ТСФ — томограмма счета фотонов

СНШР — соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона

кл.т.и. — классическая теория информации

КВТИ — квантовая теория информации

в.с. — вектор состояния

в.в. — вектор вероятности

с.м. — стохастическая матрица

ЭМП — электромагнитное поле

кубит — квантовый бит

кутрит — квантовый трит

кудит — d -уровневая квантовая система

критерий ПГ — критерий Переса-Городецкого

э.ф.н. — энтропия фон Ноймана

т.э. — томографическая энтропия

о.э. — оптическая энтропия

неравенства БКХШ — неравенства Белла-Клаузера-Хорна-Шимони

парадокс ЭРП — парадокс Эйнштейна, Розена и Подольского

л.т.с.п. — локальная теория со скрытыми параметрами

к.к. — квантовые корреляции

с.с. — сжатые состояния

$\hat{\cdot}$ — символ оператора

T — операция транспонирования

$\dagger$ — эрмитовое сопряжение

$\otimes$ — тензорное умножение

$\langle m|\hat{A}|n\rangle \equiv A_{mn}$ — матричный элемент оператора $\hat{A}$

$\langle \hat{A} \rangle_\alpha$ — среднее оператора $\hat{A}$ в представлении α

$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ — коммутатор двух операторов

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ — N -мерный вектор-столбец с элементами $x_1, x_2, \dots, x_N$

$d^N \mathbf{x}$ — элемент объема N -мерного пространства векторов $\mathbf{x}$

$H_n(x)$ — одномерный полином Эрмита

$H_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}^{\{R\}}(x)$ — многомерные полиномы Эрмита

$Ai(x)$ — функция Эйри

$L_n(x)$ — обычный полином Лагерра

$L_n^m(x)$ — присоединенный полином Лагерра

Введение

Актуальность работы. Идея о квантовых компьютерах и квантовых вычислениях восходит к Р. Фейнману [1]. Ожидается, что создание завершенной квантовой теории информации (КВТИ) [2] совершит вторую квантовую революцию в науке и технике. Многочисленные потенциальные приложения КВТИ охватывают квантовые алгоритмы вычислений [2], квантовую телепортацию [3], квантовую криптографию [4], измерения квантовых состояний [5], [6], квантовые технологии хранения и обработки информации, а также передача данных по квантовым каналам связи [7].

Многие представления КВТИ основаны на новых оптических опытах и технологиях, ставших возможными за последние несколько десятилетий [8], [9], [10], [11]. КВТИ оперирует понятиями классической теории информации Шеннона [12], основанной на теории вероятностей и математической статистике [13]. Поскольку для считывания информации с квантового компьютера необходим классический прибор, то становится ясно, что большую роль в успешном решении поставленных задач играет наличие удобного представления квантовой механики, которое способно на едином вероятностном языке описывать классические и квантовые состояния системы.

Адекватный язык описания квантовых состояний для КВТИ был предложен в начале 90-х годов В. И. Манько и др. [14], [15], [16], [17], [18], [19] в виде нового вероятностного представления квантовой механики. Квантовым состояниям ставятся в соответствие определенные неотрицательные и нормированные функции распределения вероятностей — квантовые томограммы (КВТ) [20], [21].

Математический формализм КВТ основан на методе квантования посредством звездочного произведения, обобщающего метод Вигнера-Вейля для квантования посредством фазового пространства [22], [23]. Наблюдаемые A представлены томографическими символами $f_A(\mathbf{x})$ квантомеханических операторов [24].

Методы КВТ обобщаются на область релятивистских квантовых полей [25], в частности, известна томография кварковых полей [26].

Поскольку КВТ является физической наблюдаемой, она может быть измерена на опыте со сколь угодно высокой точностью [27], [28]. В частности, томограмма позволяет исследовать свойства запутанных состояний [29], [30] по корреляциям наблюдаемых величин.

Связь между стандартной формулировкой квантовой механики [31], [32], [33] и квантовой статистики [34], [35] с КВТ была установлена в работах [36], [37], [38], [39]. Томограммы связаны с матрицей плотности и волновой функцией непрерывными и обратимыми интегральными преобразованиями [40]. Таким образом, томограммы состояния несут ту же информацию, что и оператор плотности.

В КВТ многочастичные состояния могут быть исследованы совместными распределениями случайных величин. Для многоспиновых состояний томографические распределения вероятностей введены в работах [36], [37], [38], [41]. Так возникла актуальная теоретическая задача применения томографических методов исследования квантовых состояний к проблемам КВТИ. Одна из самых актуальных задач квантовой механики и квантовой оптики заключается в понимании большого количества известных неравенств вида неравенств Белла-Клаузера-Хорна-Шимони (БКХШ) [42], [43], [44], [45], [46] и понимании нарушения ряда энтропийных неравенств классической теории информации в КВТИ (см., например, [47], [48]).

Данные неравенства являются частичными мерами запутанности [49] многокудитных состояний [50], [51]. Поскольку энтропия является основным понятием теории информации, важно исследовать поведение томографической энтропии мультикудитных состояний для выяснения природы нарушений энтропийных неравенств, а также установления связи нарушения энтропийных неравенств с нарушениями неравенств БКХШ.

Другим актуальным направлением развития томографических методов в квантовой оптике является КВТ сжатых состояний [52] вакуума электромагнитного

поля (ЭМП) [53], [54]. Сжатые состояния света представляют существенный интерес в задаче детектирования гравитационных волн и имеют многочисленные другие применения в технике [55], [56]. Наряду с состояниями Белла сжатые состояния также являются источником запутанности, которую можно измерить экспериментально. Для использования сжатых состояний очень важно знание их вероятностных характеристик [57].

Сжатые многомодовые состояния света [58] демонстрируют неклассическое поведение, обусловленное квантовыми корреляциями между модами ЭМП [59], [60]. Поскольку КВТ позволяет вычислить любые вероятностные характеристики систем посредством усреднения по заданным томографическим распределениям вероятностей, возникает задача вычисления квантовых томограм для многомодового сжатого вакуума ЭМП. В свете вышесказанного представленные исследования являются актуальными.

Цель диссертационной работы заключается в установке количественных вероятностных характеристик описания квантовых корреляций в составных квантовых системах с дискретными и непрерывными наблюдаемыми. Для достижения целей работы были поставлены следующие задачи:

1. Определить общий вид неравенств БКХШ для многокудитных состояний в спиновой томографии;
2. Вывести новые неравенства вида БКХШ для случая дискретных динамических систем в классической статистической механике;
3. Обобщить результаты задачи 2 для квантовых битов (кубитов) и кудитов и построить математический аппарат вывода неравенств БКХШ и расчета их верхних границ, пригодный для классических и квантовых состояний;
4. Сравнить полученные значения для верхних границ классических и квантовых неравенств БКХШ и определить области нарушения новых неравенств;

5. Ввести томографические энтропии для многокудитных систем до окончательных расчетов для систем из нескольких кубитов и кутритов;
6. Убедиться в нарушении энтропийных неравенств классической теории информации для квантовых томографических энтропий. Определить области “классичности” и “квантовости” многокудитных систем по отношению к нарушению энтропийных неравенств;
7. Используя результаты задач 4 и 6, выявить области, в которых нарушаются одновременно энтропийные неравенства и неравенства БКХШ. Численным моделированием состояний двух кубитов найти зависимость параметров, при которой нарушаются оба неравенства и выяснить, существует ли связь между этими двумя неравенствами;
8. Вычислить спиновые томограммы (СПТ), томограмму центра масс (ТЦМ) и томограмму счета фотонов (ТСФ) для одномодового и двухмодового сжатого состояния вакуума электромагнитного поля. Обобщить полученные выражения для N -модового сжатого вакуума поля. Вычислить средние и дисперсии томографических квадратур и установить связи между ними;
9. Найти интегральные преобразования, которые связывают между собой СПТ, ТЦМ и ТСФ сжатого многомодового состояния;
10. Получить новые интегральные соотношения между одномерными и двумерными полиномами Эрмита и полиномами Лагерра.

Научная новизна диссертации заключается в обобщении неравенства БКХШ на случай произвольных многокудитных систем с общим видом квантовых корреляций. Автором получена универсальная для классической и квантовой томографии формула, позволяющая рассчитать значения функции БКХШ по определенной стохастической матрице, ассоциированной с исследуемой системой.

Дано непосредственное обобщение понятия совместной томографической энтропии для произвольных многокудитных состояний. В работе впервые исследован вопрос о связи верхних границ томографических энтропий с верхними границами обобщенных неравенств БКХШ для запутанных состояний составных систем. В работе показано, что такой связи в общем случае не существует, и для исследования систем на предмет запутанности или сепарабельности их состояний необходимо (но не достаточно) рассмотреть верхние границы обоих видов неравенств. В работе содержится ряд конкретных приложений обобщенной классической шенноновской энтропии к КВТ.

Научная новизна в применении томографических методов в квантовой оптике заключается в прямом расчете трех плотностей распределения томографических вероятностей двухмодового сжатого вакуума. В работе автором найден закон преобразования СПТ и ТЦМ в ТСФ. В связи с этим, пересмотрено выражение для ТСФ и установлено новое интегральное соотношение между двухмерными полиномами Эрмита и функциями Лагерра. На основании полученного выражения для СПТ рассчитаны средние значения и дисперсии двух действительных квадратур ЭМП. Таким же образом получено значение квантовой корреляций между двумя квадратурами поля. Помимо основных результатов диссертация содержит ряд практических методик расчетов в квантовой оптике и КВТИ.

Теоретическая и практическая значимость работы. Экспериментальная реализация квантовых компьютеров требует новых теоретических методов расчета вероятностных характеристик квантовых систем. Вывод неравенств БКХШ и расчет их верхних границ делает диссертацию ценной в теоретическом и практическом плане поскольку содержит механизм нарушения этих неравенств, а также их связь с явлением запутанности в системах из нескольких кубитов и кудитов.

Апробация работы. Результаты докладывались на конференциях:

1. “Полугруппы и вероятностное представление квантовой механики”, Ежегод-

- ная научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, (2009).
2. “Неравенства Белла и КВТ”, Летняя школа ПМФ, Секция “Теоретическая Математическая Физика”, г. Долгопрудный, (2010).
 3. “Bell-type inequalities and Upper bounds of multi-qudit states”, *Poster presentation in XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information*, Kyiv, Ukraine, (2010).
 4. “Quantum Tomography of Multi-mode Squeezed Vacuum States of Light”, *Poster presentation in Laser Physics Conference*, Ashtarak, Armenia, (2010).
 5. Результаты работы представлены на общепредметном семинаре кафедры теоретической физики МФТИ.
 6. Результаты работы докладывались на семинаре Отделения теоретической физики НИИЯФ МГУ имени Д. В. Скобельцына.

Публикации. По теме диссертации опубликовано семь статей и два препринта. Из них пять в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации результатов кандидатских диссертаций, и две — в трудах научных конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает в себя содержание, введение, четыре главы, заключение, приложение и список цитируемой литературы. Каждая глава имеет выводы, в которых сформулированы основные результаты. **В первой главе** вводятся симплектическая (СТ) и оптические (ОТ) томограммы и томограмма счета фотонов (ТСФ), описываются общие методы исследования квантовых состояний в КВТ. **Во второй главе** вводится спиновая (СПТ) и унитарная томограмма для представления многокудитных состояний. Многокудитным состояниям ставятся в соответствие определенные стохастические матрицы, непрерывно зависящие от параметров измерений состояний, и

производится классификация состояний по признаку сепарабельности стохастических матриц составных систем. Совместные и относительные томографические энтропии определяются как функции от стохастических матриц составной системы и ее подсистем, и изучаются различные энтропийные неравенства для сепарабельных и запутанных состояний. **В третьей главе** выводятся обобщенные неравенства БКХШ для системы из N кудитов со спинами $j_1, j_2, \dots, j_N$. Строится модель для расчета верхних границ обобщенных неравенств БКХШ в классических статистических теориях. Для различных составных многокудитных систем проводится аналитическое и численное исследование обобщенной функции БКХШ, значения которой нарушают классические обобщенные неравенства БКХШ в той же модели. Проводится сравнение нарушения обобщенных неравенств БКХШ и энтропийных соотношений неопределенностей в области классичности и квантовости составных многокудитных состояний. **В четвертой главе** описываются сжатые многомодовые вакуумные состояния света с помощью СТ и ОТ, ТЦМ и ТСФ, для которых не существует адекватных квазираспределений типа функции Глаубера-Сударшана $\mathcal{P}(\alpha)$. Для каждой из томограмм проверяются условия, накладываемые соотношением неопределенностей Шредингера-Робертсона (СНШР). В частности, для о.т. проверяется выполнение энтропийных соотношений неопределенностей. Рассчитаны основные вероятностные характеристики многомодовых сжатых вакуумных состояний света, в том числе квантовые корреляции между двумя модами ЭМП. Рассматриваются интегральные преобразования между СТ и ОТ, ТЦМ и ТСФ, для двухмодового сжатого вакуума ЭМП.

Полученные результаты являются новыми и достоверными, проведенные исследования находятся на передовом рубеже современной квантовой томографии.

Благодарности. Я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, Владимиру Ивановичу Манько, за постановку задач и внимательное и заботливое руководство моими исследованиями. Эта работа во многом результат доброй и вдохновляющей атмосферы, которой Владимир Иванович окружал

и поощрял мои идеи и усилия. Я также выражаю благодарность кафедре теоретической физики Московского физико-технического института, одного из лучших научных школ России, за поддержку оригинальных теоретических исследований.

Глава 1

Вероятностное представление квантовых состояний

В первой главе рассматриваются основные томографические методы исследования квантовых состояний. Классическая томография представляет собой экспериментальный метод восстановления плотности распределения вещества путем сканирования пучка частиц, которым облучают исследуемое тело. Квантовая томография (КВТ) является экспериментальным и теоретическим методом восстановления квантового состояния по измерениям наблюдаемых системы [55], [56]. В квантовой оптике состояние фактически восстанавливается по многократному гомодинному измерению квадратурных компонент X_θ оптических полей по заданной фазе θ локального осциллятора [61], [62]. По измерениям X_θ определяется гистограмма плотности распределения вероятностей $w(X, \theta)$ различных значений квадратуры из интервала $X, X + dX$. Таким образом, экспериментально измеренная функция $w(X, \theta)$ называется оптической томограммой (ОТ). Обратным преобразованием Радона [63] затем можно получить либо удобное для данной задачи квазираспределение [64], либо непосредственно матрицу плотности состояния. Обобщенный томографический принцип измерения квантовых состояний был сформулирован в [27].

Детальный обзор вероятностного представления квантовых состояний и физических приложениях квантовой томографии содержится в работах [21], [28].

В параграфе 1.1 рассмотрено представление квантовой механики и квантовой оптики на фазовой плоскости в общей схеме квантования посредством звездочного произведения Вейля [23], [65]. В параграфах 1.2 и 1.3 описываются классические и квантовые симплектические томограммы (СТ) и их общие свойства. В параграфе 1.4 приводится описание суперпозиции квантовых томограмм, расчет СТ и

ТСФ для неклассических состояний шредингеровского кота [29]. В параграфе 1.5 на языке квантовых СТ формулируется СНШР и указывается возможность опытной проверки этих соотношений в КВТ.

1.1. Квантовая механика и оптика на фазовой плоскости

В стандартной формулировке квантовой механики [31], [32], [33] и квантовой статистики [34], [35] физические состояния описываются векторами состояния или оператором плотности [66], [67].

Согласно принципу суперпозиции [31], [32], [66] для двух квантовых состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ системы в природе реализуется также состояние

$$|\psi\rangle = \frac{c_1}{N}|\psi_1\rangle + \frac{c_2}{N}|\psi_2\rangle, \quad N^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2N_{12}r_1r_2 \cos(\varphi_{12} + \theta_1 - \theta_2), \quad (1.1)$$

где $c_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $c_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ — комплексные числа с амплитудами r_1 , r_2 и фазами θ_1 , θ_2 . В общем случае состояния $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ не ортогональные $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = N_{12}e^{i\varphi_{12}}$. Квадрат величины N_{12} можно интерпретировать как вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2.

Оператор плотности чистого состояния $|\psi\rangle$ равен

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \rho(x, x') = \psi(x)\psi^*(x') = \frac{\rho(x, 0)\rho(0, x')}{\rho(0, 0)}, \quad (1.2)$$

где $\psi(x)$ — волновая функция системы, а $\rho(x, x')$ — матрица плотности в координатном представлении. Из определения (1.2) видно, что можно восстановить волновой вектор и волновую функцию состояния по оператору плотности и функцию плотности по формулам

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{\rho}|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle}}, \quad \psi(x) = \sqrt{\rho(0, 0)} \frac{\rho(x, x')}{\rho(0, x')} = \frac{\rho(x, 0)}{\sqrt{\rho(0, 0)}}. \quad (1.3)$$

Оператор плотности, соответствующий состоянию (1.1), вычисляется по формуле

$$\hat{\rho}_s = \hat{\rho}_m + r_1 r_2 (\hat{\rho}_{12} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + \hat{\rho}_{12}^\dagger e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}), \quad (1.4)$$

где оператор $\hat{\rho}_m$ обозначает ненормированное смешанное состояние $\rho_m = r_1^2 \hat{\rho}_1 + r_2^2 \hat{\rho}_2$, а $\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 / \sqrt{Tr \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}$.

Отметим, что если $\hat{\rho}$ оператор плотности некоторого состояния, то транспонированный к нему оператор $\hat{R} \equiv \hat{\rho}^T$ будет также оператором плотности. Действительно, оператор $\hat{\rho}^T$ удовлетворяет всем требованиям определения оператора плотности [32], [33], [66]. Оператор $\hat{R}$ эрмитов $\hat{R}^\dagger = (\hat{\rho}^T)^\dagger = (\hat{\rho}^\dagger)^T = \hat{\rho}^T$. Оператор $\hat{R}$ положительно определен $\langle R \rangle = \langle n | \hat{\rho}^T | n \rangle = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle \geq 0$. След оператора $\hat{R}$ равен единице $Tr \hat{R} = Tr \hat{\rho}^T = Tr \hat{\rho} = 1$. Из определения (1.2) следует, что для чистых состояний $\hat{\rho}_\psi^2 = |\psi\rangle\langle\psi| \cdot |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}_\psi$. Вообще, состояние чистое только в том случае, когда выполняется условие $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Величина

$$\mu_\rho = Tr \hat{\rho}^2 = \int |\rho(q, q')|^2 dq dq' \quad (1.5)$$

называется параметром чистоты состояния [59]. Параметр чистоты равен единице для чистых состояний. Для смешанных состояний необходимо дополнительно усреднить операторы плотности с различными вероятностными весами p_i

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1.6)$$

где $|\psi_i\rangle$ — совокупность чистых состояний, которые вовсе не составляют полный базис ортонормированных состояний. Тогда параметр чистоты для смешанных состояний $\mu_\rho = Tr \hat{\rho}^2 = \sum_{ij} p_i p_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 \leq 1$. Число действительных параметров s характеризующих квантовое состояние определяется размерностью d гильбертового пространства системы. Для чистых состояний $s = 2d - 2$, а для смешанных состояний $s = d^2 - 1$. Как и всякая двухрядная комплексная матрица, матрица плотности спина $j = 1/2$ раскладывается по нормированному базису операторов проекций $\hat{j}_i$ и величины спина $\hat{j}^2$. Из общих свойств матрицы плотности, находим ее представление в виде

$$\rho^{(1/2)} = \frac{1}{2} + \alpha_i \sigma_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \frac{1}{2} - \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где σ_i — матрицы Паули, а $i = 1, 2, 3$. Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удобно представить в виде трехмерного вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Легко видеть, что $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = \boldsymbol{\alpha}$.

Требование чистоты состояния (1.7) сводится к неравенству $\boldsymbol{\alpha}^2 \leq 1/4$. Таким образом, все состояния кубита смешанные за исключением состояний, расположенных на сфере Блоха [33] с радиусом $1/2$. В частности, максимально смешанное состояние кубита соответствует центру шара $\boldsymbol{\alpha} = 0$, где энтропия фон Неймана [66] максимальна и равна $\ln 2$. Точкам $(0, 0, 1/2)$ и $(0, 0, -1/2)$ на сфере Блоха соответствуют спиновые состояния $|+\frac{1}{2}\rangle$ и $|-\frac{1}{2}\rangle$. Эти состояния соответствуют классическому биту со значениями 0 и 1. При заданных двух системах с матрицами плотности $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ степень “близости” состояний $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ определяется как фиделити

$$f_{12} = \langle \hat{\rho}_1 | \hat{\rho}_2 \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2]. \quad (1.8)$$

В предельном случае $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$ понятие фиделити совпадает с ранее введенным параметром чистоты состояния.

Сформулируем закон сложения для матрицы плотности с учетом принципа суперпозиции

$$\hat{\rho}_\psi(q_1, q_2) = |c_1|^2 \hat{\rho}_{\psi_1}(q_1, q_2) + |c_2|^2 \hat{\rho}_{\psi_2}(q_1, q_2) + \left[c_1 c_2^* e^{i\varphi} \frac{\rho_{\psi_1}(q_1, 0) \rho_{\psi_2}^*(q_2, 0)}{\sqrt{\rho_{\psi_1}(0, 0) \rho_{\psi_2}(0, 0)}} \right] + \text{к.с.} \quad (1.9)$$

где $e^{i\varphi} = \langle 0 | \psi_1 \rangle / |\langle 0 | \psi_1 \rangle| \cdot \frac{\langle 0 | \psi_2 \rangle}{|\langle 0 | \psi_2 \rangle|}$, а φ — разность фаз состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$.

В дальнейших вычислениях будем часто использовать когерентные состояния [33], [32], [68]. Волновые функции когерентных состояний имеют вид

$$\psi_\alpha(q) = C_\alpha e^{\sqrt{2}\alpha q - \frac{q^2}{2}}, \quad C_\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-(\text{Re}\alpha)^2}. \quad (1.10)$$

В когерентных состояниях средние значения координаты и импульса равные соответственно $\langle q \rangle_\alpha = \sqrt{2}\text{Re}\alpha$ и $\langle p \rangle_\alpha = \sqrt{2}\text{Im}\alpha$. В когерентных состояниях, как и в

основном, минимизируется соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\sigma_{qq} = \sigma_{pp} = \frac{1}{2}. \quad (1.11)$$

и квантовые корреляции между координатой и импульсом σ_{qp} отсутствуют [33].

В классической статистической механике состояния системы описываются функцией плотности распределения вероятностей $f(q, p, t)$ [35]. В квантовой механике, из-за соотношений неопределенностей Гейзенберга введение функции распределения невозможно. Однако, попытки понимания квантовой механики на языке обычной теории вероятностей привели к введению квазираспределений вероятностей, описывающих полностью квантовые состояния, но являющиеся функциями распределения лишь на ограниченных участках фазовой плоскости [55]. Примерами квазираспределений являются функция Вигнера [22], $\mathcal{P}$ -квазираспределение Глаубера-Сударшана [68], [69], [70] и Q -функция Хусими-Кано [71], [72]. Первые два распределения знакопеременные, поэтому вообще говоря не годятся в качестве функции распределения для наблюдаемой величины.

Функция Хусими-Кано, с другой стороны, представляет собой диагональные элементы оператора плотности в базисе когерентных состояний и является таким образом классической функцией распределения вероятностей. Однако, и в этом случае она не представляет вероятности измерения значений каких-нибудь наблюдаемых в силу нефизичности самих когерентных состояний.

Функция Вигнера вводится согласно [22]:

$$W(p, q, t) = \int \psi^*\left(q + \frac{u}{2}, t\right) \psi\left(q - \frac{u}{2}, t\right) e^{-iup} du. \quad (1.12)$$

Здесь q, p одномерные обобщенные координата и импульс квантовой системы, а $\psi(q, t)$ — волновая функция. Для стационарных состояний, время t будем опускать из обозначения функции Вигнера. Из определения функции Вигнера следуют следующие ее свойства:

1. Функция Вигнера системы действительна всюду на фазовой плоскости

$$W(p, q) = W^*(p, q). \quad (1.13)$$

2. Функция Вигнера нормирована

$$\int W(p, q) \frac{dq dp}{2\pi} = \int \delta(u) \psi^*(q + \frac{u}{2}) \psi(q - \frac{u}{2}) = \int |\psi|^2 dq = 1. \quad (1.14)$$

Зная функцию Вигнера, можно рассчитать плотность распределения вероятности координаты q . Действительно,

$$\int W(p, q) dp = \int \psi^*(q + \frac{u}{2}) \psi(q - \frac{u}{2}) 2\pi \delta(u) du = 2\pi |\psi(q)|^2. \quad (1.15)$$

Аналогично, можно получить плотность вероятности распределения импульса:

$$\int W(p, q) dq = \int dx_1 e^{ipx_1} \psi(x_1) \cdot \int dx_2 e^{-ipx_2} \psi^*(x_2) = 2\pi |\psi(p)|^2. \quad (1.16)$$

Введение оператора плотности позволяет обобщить функцию Вигнера на смешанные состояния следующим образом

$$W(p, q) = \int \rho(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}) e^{-iup} du = 2 \int dx_1 dx_2 e^{-2i(x_2 - q)} \delta(x_1 + x_2 - 2q) \rho(x_1, x_2). \quad (1.17)$$

Для маргинальных распределений получаем

$$\begin{cases} \int W(p, q) dp = \int \langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \rangle 2\pi \delta(u) du = 2\pi \langle q | \hat{\rho} | q \rangle, \\ \int W(p, q) dq = 2\pi \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_2} \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx_2} dx_1 dx_2 = 2\pi \langle p | \hat{\rho} | p \rangle. \end{cases} \quad (1.18)$$

Функции Вигнера квантовой системы содержит исчерпывающую информацию о ней. Действительно, по формуле (1.17) матрицу плотности можно выразить через функцию Вигнера пользуясь обратным преобразованием Фурье

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int W\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, p\right) e^{ip(x_1 - x_2)} dp. \quad (1.19)$$

Пользуясь формулами (1.2) и (1.19) можем выразить волновую функцию чистого состояния через функцию Вигнера

$$\psi(x) = \frac{\rho(x, 0)}{\sqrt{\rho(0, 0)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\int W\left(\frac{x}{2}, p\right) e^{ipx} dp}{\sqrt{\int W(0, p) dp}}. \quad (1.20)$$

В качестве примера найдем функцию Вигнера для основного состояния квантового гармонического осциллятора. По формуле (1.12) находим

$$W_0(p, q) = \pi^{1/2} e^{-q^2} e^{-p^2} \int e^{-\left(\frac{u}{2} + ip\right)^2} du = 2e^{-q^2-p^2} \equiv 2\pi |\psi_0(q)|^2 |\psi_0(p)|^2 \quad (1.21)$$

и видим, что для основного состояния гармонического осциллятора, функция Вигнера сама является функцией распределения. Проверим формулу (1.20) для основного состояния. Подставим функцию Вигнера для основного состояния из (1.21)

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\int e^{-x^2/4-p^2+ipx} dp}{\sqrt{\int 2e^{-p^2} dp}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}. \quad (1.22)$$

Этот результат обусловлен тем, что в основном состоянии гармонического осциллятора минимизируется соотношение неопределенностей Гейзенберга. Вычислим теперь функцию Вигнера для стационарного гауссовского пакета

$$\psi_G(q) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(q - q_0)^2}{4\sigma} + ip_0 q \right\}. \quad (1.23)$$

Здесь p_0 обозначает средний импульс пакета $p_0 = \langle p \rangle$, q_0 обозначает среднюю координату пакета $q_0 = \langle q \rangle$, σ обозначает средне квадратичное отклонение координаты $\sigma = \sigma_{qq} = (\delta q)^2 = \langle q^2 \rangle$. Вычисление по формуле (1.12) дает тот же результат, что и (1.21): функция Вигнера распадается на произведение маргинальных распределений вероятностей координаты и импульса.

Поскольку знание функции Вигнера полностью задает квантовое состояние, ясно, что основные уравнения квантовой механики могут быть переписаны и для

функции Вигнера. Эти уравнения были сформулировано Моелем [65] и носит его имя.

Перейдем теперь к определению схемы квантования классической системы посредством звездочного произведения символов наблюдаемых [73]. Пусть задан оператор $\hat{A}$ действующий над гильбертовым пространством H . Обозначим набор квантовых чисел системы $x_1, x_2, \dots, x_n$ комплексным вектором $\mathbf{x}$, т.е. пространство H состоит из векторов $|\mathbf{x}\rangle$. Если удастся найти пару операторов $\hat{U}$ и $\hat{D}$, позволяющих установить взаимно однозначное соответствие между оператором $\hat{A}$ и некоторой функцией $f_{\hat{A}}(\mathbf{x})$

$$\begin{cases} \hat{U} : \hat{A} \rightarrow f_{\hat{A}}(\mathbf{x}), \\ \hat{D} : f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{A}, \end{cases} \quad (1.24)$$

то можем говорить о задании соответствия между классическим и квантовыми описаниями системы. Очевидно, при этом необходимо, чтобы система (1.24) была самосогласована. Такая схема была предложена Вейлем [23] для физической интерпретации соответствия функции Вигнера и оператора плотности и носит названия схемы Вигнера-Вейля. В этой схеме система (1.24) имеет конкретную форму:

$$\begin{cases} f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) = \text{Tr}[\hat{A}\hat{U}(\hat{\mathbf{x}})], \\ \hat{A} = \int d\mathbf{x} f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \hat{D}(\hat{\mathbf{x}}). \end{cases} \quad (1.25)$$

Для самосогласованности системы необходимо выполнение соотношения

$$\text{Tr}[\hat{U}(\hat{\mathbf{x}})\hat{D}(\hat{\mathbf{y}})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.26)$$

Функция $f_{\hat{A}}(\mathbf{x})$ называется символом оператора $\hat{A}$. При этом операторы $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}})$ и $\hat{D}(\hat{\mathbf{x}})$, осуществляющие переход из квантовой механики к классической и обратно, называются деквантайзером и квантайзером.

Из определения квантайзера и деквантайзера видно, что если производить замену $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) \longleftrightarrow \hat{D}(\hat{\mathbf{x}})$ соотношение самосогласованности не нарушается. Следовательно, наряду с ними можно ввести также пару операторов $\hat{U}^d(\hat{\mathbf{x}})$ и $\hat{D}^d(\hat{\mathbf{x}})$

дуальных им т.е. определить новые квантайзеры и деквантайзеры $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) \rightarrow \hat{D}(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \hat{U}^d(\hat{\mathbf{x}})$, $\hat{D}(\hat{\mathbf{x}}) \rightarrow \hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \hat{D}^d(\hat{\mathbf{x}})$.

Если можно подобрать такое число λ , что $\hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) = \lambda \hat{D}^d(\hat{\mathbf{x}})$, то говорят, что задана самодуальная схема.

В квантовой механике умножение операторов обладает свойством ассоциативности, но не коммутативности. Поэтому для задания изоморфного соответствия между операторами и функциями необходимо ввести другой вид умножения символов операторов. Именно, если $\hat{A}$, $\hat{B}$, C некие операторы данной системы, а $f_{\hat{A}}(\mathbf{x})$, $f_{\hat{B}}(\mathbf{x})$, $f_C(\mathbf{x})$ соответствующие им символы, соотношение $\hat{A}(\hat{B}C) = (\hat{A}\hat{B})C = \hat{A}\hat{B}C$ должно влечь за собой аналогично соотношение для перемножения символов операторов $f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \star (f_{\hat{B}}(\mathbf{x}) \star f_C(\mathbf{x})) = (f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \star f_{\hat{B}}(\mathbf{x})) \star f_C(\mathbf{x}) = f_{\hat{A}}(\mathbf{x}) \star f_{\hat{B}}(\mathbf{x}) \star f_C(\mathbf{x})$. Представим себе, что место точечного умножения функций, мы могли в принципе брать и другую более сложную функцию, и тогда место обычного умножения двух числовых функций имели бы дело с неким новым способом определения произведения между двумя функциями вида

$$f_1(\mathbf{x}) \star f_2(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} d\mathbf{z} f_1(\mathbf{y}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) f_2(\mathbf{z}). \quad (1.27)$$

Определенное таким образом произведение называется звездочным произведением, а функция $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ называется ядром звездочного произведения.

Итак, если $f_{\hat{A}}$ символ оператора $\hat{A}$, а $f_{\hat{B}}$ символ оператора $\hat{B}$, то символ произведения $C = \hat{A}\hat{B}$ будет звездочным произведением символов $f_{\hat{A}}$ и $f_{\hat{B}}$, т.е. $f_C = f_{\hat{A}} \star f_{\hat{B}}$.

Установим вид ядра звездочного произведения для схемы Вигнера-Вейля (1.25). Для этого запишем сначала символ оператора $C = \hat{A}\hat{B}$. Согласно определению деквантайзера (1.25) имеем $f_C(\mathbf{x}) = Tr C \hat{U}(\mathbf{x}) = Tr \hat{A} \hat{B} \hat{U}(\mathbf{x})$. Подставим в эту формулу представление каждого из операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ посредством квантайзера

$\hat{D}(\mathbf{x})$ по схеме Вигнера-Вейля. Для символа оператора C тогда получим:

$$f_C(\mathbf{x}) = \int f_{\hat{A}}(\mathbf{y}) f_{\hat{B}}(\mathbf{z}) \text{Tr} \left(\hat{D}(\hat{\mathbf{y}}) \hat{D}(\hat{\mathbf{z}}) \hat{U}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{y} d\mathbf{z}. \quad (1.28)$$

Сопоставив полученное выражение с определением звездочного произведения (1.25) для символов операторов, видим, что ядро звездочного произведения для схемы Вигнера-Вейля есть $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \text{Tr}[\hat{D}(\hat{\mathbf{y}}) \hat{D}(\hat{\mathbf{z}}) \hat{U}(\hat{\mathbf{x}})]$.

Дуальное $\star$ -произведение задается ядром дуальным к $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Действительно, $K^d(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \text{Tr}[\hat{D}^d(\hat{\mathbf{y}}) \hat{D}^d(\hat{\mathbf{z}}) \hat{U}^d(\hat{\mathbf{x}})] = \text{Tr}[\hat{U}(\hat{\mathbf{y}}) \hat{U}(\hat{\mathbf{z}}) \hat{D}(\hat{\mathbf{x}})]$.

Все томографические преобразования связаны обратимыми интегральными преобразованиями. В самом деле, из самого определения томограммы, переход со второй томографии к первой задается преобразованием [24]

$$w_{\hat{A}}^{(1)}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} K^{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w_{\hat{A}}^{(2)}(\mathbf{y}), \quad K^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Tr} \hat{U}^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{D}}^{(2)}(\mathbf{y}), \quad (1.29)$$

а от первой томографии ко второй

$$w_{\hat{A}}^{(2)}(\mathbf{z}) = \int d\mathbf{t} K^{12}(\mathbf{z}, \mathbf{t}) w_{\hat{A}}^{(1)}(\mathbf{t}), \quad K^{12}(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \text{Tr} \hat{U}^{(2)}(\mathbf{z}) \hat{\mathcal{D}}^{(1)}(\mathbf{t}). \quad (1.30)$$

Из (1.29) следует условие

$$\int K^{12}(\mathbf{z}, \mathbf{t}) \mathbf{t} K^{21}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) d\mathbf{t} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}). \quad (1.31)$$

Оказывается, что важнейшие квазираспределения на фазовой плоскости — функции Вигнера, Глаубера-Сударшана и Хусими-Кано — являются различными символами оператора плотности. Откладывая общие исследования этих функций до параграфа 2.5, покажем, что функция Вигнера $W(q, p)$ есть символ оператора плотности $\hat{\rho}$. Рассмотрим для этого пространство квантовых чисел $\mathbf{x} = (q, p)$, где q, p — координата и импульс системы и зададим деквантайзер

$$\hat{U}(\hat{\mathbf{x}}) = 2\hat{\mathcal{D}}(\alpha) I \hat{\mathcal{D}}(-\alpha) = \hat{U}(q, p) = \int du |q - \frac{u}{2}\rangle \langle q + \frac{u}{2}| e^{-iup}. \quad (1.32)$$

Здесь $\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ — оператор сдвига [60], а $I(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = (-1)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}$ — оператор четности. Векторный оператор $\hat{\mathbf{x}}$ обозначает пару операторов $(\hat{q}, \hat{p})$. При

вычислении следа мы учли, что операторы можно переставлять под знаком следа, и свойство $\hat{I}\hat{\mathfrak{D}}(\alpha) = \hat{\mathfrak{D}}(-\alpha)\hat{I}$ [60] оператора сдвига при инверсиях. Вычислим символ оператора плотности

$$f_\rho(\mathbf{x}) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{U}(\hat{q}, \hat{p})] = \int \langle q + \frac{u}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{u}{2} \rangle e^{-iup} du \equiv W(q, p). \quad (1.33)$$

Символ Вейля оператора плотности при подходящем выборе квантайзера совпадает с функцией Вигнера (1.17).

Определим теперь деквантайзер $\hat{D}(\hat{\mathbf{x}})$, положив $\hat{D}(\mathbf{x}) = \hat{U}(\mathbf{x})/2\pi$. Легко проверить нормировку (1.26) $\text{Tr}[\hat{U}(\mathbf{x})\hat{D}(\mathbf{y})] = 1/2\pi \text{Tr}[\hat{\mathfrak{D}}(2\alpha_{\mathbf{x}})\hat{\mathfrak{D}}(-2\alpha_{\mathbf{y}})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Теперь можем вычислить ядро звездочного произведения. Согласно схеме Вигнера-Вейля, оператор плотности выражается через функцию Вигнера формулой

$$\hat{\rho} = \int dqdp W(q, p) \hat{D}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int dqdp W(q, p) \hat{U}(q, p), \quad (1.34)$$

что совпадает с формулой (1.19).

Посмотрим каким образом выражается фиделити (1.8) и параметр чистоты состояния (1.5) через функцию Вигнера. По формуле (1.34) получаем

$$f_{12} = \frac{1}{4\pi} \int dqdp W_1(q, p) W_2(q, p), \quad \mu = \int W_\psi^2(q, p) \frac{dqdp}{2\pi}. \quad (1.35)$$

1.2. Томография классических непрерывных систем

Этот раздел посвящен описанию классических статистических систем с непрерывными наблюдаемыми в томографическом представлении. Ради простоты, будем рассматривать классические статистические системы одного измерения. Пусть нам задана функция распределения системы $f(q, p)$, где q, p обобщенные координата и импульс. Сконструируем новую функцию совершив преобразование Радо-на [63]

$$w(X, \mu, \nu) = \int f(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dqdp, \quad (1.36)$$

где μ, ν некоторые действительные параметры. Функция (1.36) называется томограммой классического состояния $f(q, p)$ и обладает свойствами

1. Томограмма $w(X, \mu, \nu)$ классических состояний неотрицательна всюду на фазовой плоскости

$$w(X, \mu, \nu) \geq 0. \quad (1.37)$$

2. Томограмма $w(X, \mu, \nu)$ нормирована на единицу

$$\int w(X, \mu, \nu) dX = \int f(q, p) dq dp = \int w(X, 0, 0) e^{iX} dX = 1. \quad (1.38)$$

Из определения функции плотности распределения следует, что томограмма $w(X, \mu, \nu)$ сама есть некая плотность распределения вероятности. Фактически, преобразование (1.36) позволяет перейти от совместной функции распределения двух величин q и p к новой функции распределения для величины X .

Параметр μ безразмерен, а размерность параметра $[\nu] = [m^{-1}][t]$, где $[m]$, $[t]$ — размерности массы и времени, соответственно.

Из определения томограммы (1.36) видно, что отличные от нуля вклады в томограмму дают только те траектории, для которых

$$X = \mu q + \nu p. \quad (1.39)$$

Симплектическое преобразование на плоскости сводится к масштабированию и поворотам осей координат. Следовательно, параметры μ и ν могут быть выражены через параметры масштабирования s и угол поворота θ координатных осей (q, p)

$$\begin{cases} \mu = s \cos \theta, \\ \nu = s^{-1} \sin \theta. \end{cases} \quad (1.40)$$

Таким образом, величина X представляет собой положение частицы в системе отчета, повернутой относительно исходной на угол θ . При этом заранее необходимо изменить каноническим образом масштаб координатной системы $q \rightarrow sq$, $p \rightarrow s^{-1}p$.

Параметризация (1.40) позволяет нам перейти от томограммы $w(X, \mu, \nu)$ к томограмме $\pi(X, \theta)$. Пусть масштабирование повернутой системы отчета неизменно, т.е. $s = 1$. Рассмотрим предельные случаи для томограммы $\pi(X, \theta)$. Для $\mu = 1, \nu = 0$ томограмма дает маргинальное распределение вероятностей для координаты $X = q$. Действительно, в этом случае по формуле (1.36) получаем

$$w(X, 1, 0) = \int f(q, p) dp = \pi_q(X, \theta = 0). \quad (1.41)$$

Для $\mu = 0, \nu = 1$ томограмма дает маргинальное распределение вероятностей импульса $X = p$. В самом деле, в этом случае получаем

$$w(X, 0, 1) = \int f(q, p) dq = \pi_p\left(X, \theta = \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.42)$$

В точке $\theta = 0$ томограмма измеряет различные вероятности нахождения системы в координате X . При повороте системы на угол $\pi/2$ томограмма измеряет вероятности распределения значения импульса системы. В общем же случае, томограмма $w(X, \theta)$ измеряет распределение томографической координаты X в повернутой системе координат.

Если бы мы наряду с преобразованием (1.39) рассмотрели бы также преобразование по импульсу системы, т.е.

$$\begin{cases} X = q \cos \theta + p \sin \theta, \\ P_X = -q \sin \theta + p \cos \theta, \end{cases} \quad (1.43)$$

то оно имело бы смысл линейных канонических преобразований, сохраняющих скобки Пуассона $\{q, p\} = \{X, P_X\} = 1$.

Линейные канонические преобразования обобщенных координат и импульсов, принято называть симплектическими преобразованиями. Поэтому классическую томограмму (1.36) называют симплектической томограммой (СТ).

Из свойств δ -функции следует, что томограмма $w(X, \mu, \nu)$ — однородная функция порядка -1 , т.е.

$$w(\lambda x, \lambda \mu, \lambda \nu) = |\lambda|^{-1} w(X, \mu, \nu). \quad (1.44)$$

По заданной томограмме (1.36) состояние системы восстанавливается обратным преобразованием Радона

$$f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int w(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu. \quad (1.45)$$

Соотношение (1.45) вместе со свойством томограммы как функции распределения показывает нам, что СТ содержит в себе исчерпывающую информацию о классическом состоянии. Проверим справедливость обратного преобразования, подставляя определение томограммы в (1.45). Получим

$$\begin{aligned} f(q, p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(q', p') \delta(x - \mu q' - \nu p') e^{i(x - \mu q - \nu p)} dx d\mu d\nu dq' dp' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(q', p') e^{i\mu(q' - q)} e^{i\nu(p' - p)} d\mu d\nu dq' dp' = f(q, p). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Таким образом, мы убедились в самосогласованности формул (1.36)-(1.45).

Томограммы нестационарных состояний задаются той же формулой, что и (1.36), где необходимо только заменить стационарное распределение общей функцией плотности $f(q, p, t)$, удовлетворяющей кинетическим уравнениям.

1.3. Томография квантовых непрерывных систем

Томограмма состояния квантовой системы с непрерывными наблюдаемыми $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ была введена и развита в работе [14] как компонента Радона функции Вигнера

$$w(X, \mu, \nu) = \int W(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp. \quad (1.47)$$

Подставив в формулу (1.47) определение функции Вигнера посредством оператора плотности (1.17), после интегрирования по импульсу, получим

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu) &= \int \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp \frac{1}{2\pi} \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) e^{-iup} du = \\ &= \frac{1}{2\pi|\nu|} \int \rho\left(q + \frac{u}{2}, q - \frac{u}{2}\right) \exp\left(-i\frac{X - \mu q}{\nu}u\right) du dq. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Покажем, что КВТ обладает свойствами плотности распределения вероятностей различных состояний квантовой системы.

1. КВТ системы всюду положительна на фазовой плоскости. В частности, для чистых состояний с волновой функцией $\psi(x)$ из формулы (1.48) следует

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \psi(y) \exp \left(i \frac{\mu}{2\nu} y^2 - i \frac{Xy}{\nu} \right) dy \right|^2 \geq 0. \quad (1.49)$$

Эта формула была впервые выведена в работе [74].

2. КВТ нормирована на единицу.

$$\int w(X, \mu, \nu) dX = \int W(p, q) \frac{dqdp}{2\pi} = 1.$$

Различные состояния системы определяются распределением вероятности значений случайной величины X . От переменных μ и ν можно перейти к s и θ преобразованием (1.40). Однако, в квантовой оптике эти параметры имеют смысл сжатия и фазы. КВТ (1.47) содержит полную информацию о квантовом состоянии. Действительно, обратив преобразование Радона по заданной томограмме $w(x, \mu, \nu)$ можно восстановить функцию Вигнера по формуле

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu. \quad (1.50)$$

С помощью формулы (1.34), выражающей матрицу плотности $\rho(x_1, x_2)$ через функцию Вигнера (1.50), можно получить матрицу плотности через томограмму

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ip(x_1 - x_2)} dp \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) \exp \left(i \left(x - \mu \frac{x_2 + x_1}{2} - \nu p \right) \right) dX d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \delta(x_1 - x_2 - \nu) w(X, \mu, \nu) \exp \left(i \left(X - \mu \frac{x_2 + x_1}{2} \right) \right) dX d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, x_1 - x_2) \exp \left(i \left(X - \mu \frac{x_2 + x_1}{2} \right) \right) dX d\mu. \end{aligned} \quad (1.51)$$

В частности, пользуясь (1.3), волновая функция чистого состояния выражается посредством СП формулой

$$\psi(x) = \frac{\int w(Y, \mu, x) \exp i \left(Y - \frac{\mu x}{2} \right) dY d\mu}{\sqrt{2\pi \int w(Y, \mu, 0) e^{iY} dY d\mu}} \cdot e^{i\varphi}, \quad (1.52)$$

где φ — произвольная фаза.

Из определений КВТ для чистых и смешанных состояний (1.48) вытекают соотношения $w_\psi(X, 1, 0) = \mathcal{P}(q)$, $w_\psi(X, 0, 1) = \mathcal{P}(p)$, где $\mathcal{P}(q)$, $\mathcal{P}(p)$ — распределения вероятностей координаты и импульса соответственно.

Общее определение КВТ основано на понятии символов квантовых операторов. Представим оператор плотности в диагональном представлении [60]

$$\hat{\rho} = \int \mathcal{P}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (1.53)$$

Здесь $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$ — комплексное число, $\hat{a}$ — знакомый нам бозонный оператор уничтожения $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}$, $d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha$. Функция $\mathcal{P}(\alpha)$ напоминает плотность распределения вероятностей. Она известна как $\mathcal{P}$ -функция Глаубера-Сударшана [68], [69]. Интуитивно ясно, что для тех состояний, для которых $|\alpha - \alpha'| \gg 1$, $\mathcal{P}$ -функция будет меняться плавно и слабо, поэтому на больших масштабах функция Глаубера-Сударшана может иметь классическую интерпретацию некой функции распределения вероятностей. Однако, существуют определенные квантовые состояния для которых $\mathcal{P}$ -функция может принимать отрицательные значения или стать даже обобщенной функцией. Все такие состояния не могут быть описаны классическим образом. Рассмотрим примеры состояний, которые могут быть описаны $\mathcal{P}$ -распределением.

Связь между функцией Вигнера и $\mathcal{P}$ -функцией Глаубера-Сударшана можно вывести, подставив в определение функции Вигнера (1.33) формулу (1.53). В результате получается

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int \mathcal{P}(\beta) e^{-2|\beta - \alpha|^2} d^2\beta. \quad (1.54)$$

Перейдем теперь к общему выводу выражения для томограммы как символу оператора плотности при подходящем выборе деквантайзера. СТ (1.47) является символом Вейля оператора плотности с симплектическим деквантайзером [19]

$$\hat{U}_s(X, \mu, \nu) = \hat{S}_{\mu, \nu} |X\rangle \langle X| \hat{S}_{\mu, \nu}^\dagger = \delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}), \quad (1.55)$$

где оператор сжатия и вращения на фазовой плоскости $\hat{S}_{\mu, \nu}$ определяется $\hat{S}_{\mu, \nu} = e^{i\lambda\hat{\sigma}} e^{i\theta\hat{H}_0}$, а $\hat{H}_0$ — гамильтониан квантового гармонического осциллятора с единичной частотой. Для СП непрерывной динамической системы получаем общую формулу

$$w(X, \mu, \nu) = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{U}(\mathbf{x})) = \text{Tr}(\hat{\rho}\delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})). \quad (1.56)$$

Здесь X — собственное значение преобразованного оператора первой квадратурной компоненты поля $\hat{Q}$ в сжатой и повернутой системе отсчета

$$Q = \mu\hat{q} + \nu\hat{p}, \quad \hat{Q}|X\rangle = X|X\rangle. \quad (1.57)$$

Параметры μ и ν вещественные. Они осуществляют выбор повернутой и перешкалированной системы отсчета, в которой мы хотим совершить томографические измерения над новой амплитудой поля X . Они связаны с абсолютной величиной сжатия λ и углом вращения в плоскости θ соотношениями

$$\mu = e^\lambda \cos \theta, \quad \nu = e^{-\lambda} \sin \theta. \quad (1.58)$$

Иногда удобно эти два действительных параметра (1.58) объединить в комплексное число $\zeta = \mu + i\nu = e^{i\theta} ch\lambda - e^{-i\theta} sh\lambda$. Квантайзер симплектической томографии дается выражением [24]

$$\hat{\mathcal{D}}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} e^{iX\hat{1}} \hat{D}(\xi), \quad (1.59)$$

здесь ξ — комплексная амплитуда поля, связанная с параметрами (1.58) посредством $\xi = -i\zeta/\sqrt{2}$.

Вычисление следа (1.56) произведем в координатном представлении $|x_1\rangle\langle x_2|$. Пользуясь выражением для матричного элемента от операторной дельта-функции (A.6), получаем

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu) &= \int \rho(x_1, x_2) \langle x_2 | \delta(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p}) | x_1 \rangle dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi|\nu|} \int \exp \left\{ -i \frac{x_1 - x_2}{\nu} \left(X - \mu \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right\} \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Формула (1.60) является обобщением формулы (1.49) на произвольные состояния описываемые матрицей плотности.

Аналогично, можно получить томограмму в виде интеграла по функции Глаубера-Сударшана с некоторым ядром. Для этого представим оператор повернутой координаты X в виде $X\hat{1} = \mu\hat{q} + \nu\hat{p} = \frac{\mu - i\nu}{\sqrt{2}}\hat{a} + \frac{\mu + i\nu}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger$. Подставляя это представление в общее определение томограммы (1.56), можем написать

$$w(X, \mu, \nu) = \int \mathcal{P}(\alpha) \langle \alpha | \delta(X\hat{1} - \frac{\mu - i\nu}{\sqrt{2}}\hat{a} - \frac{\mu + i\nu}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle d^2\alpha. \quad (1.61)$$

После простых, но громоздких вычислений получаем томограмму в виде интеграла от функции Глаубера-Сударшана $\mathcal{P}(\alpha)$ диагонального представления матрицы плотности:

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \int \mathcal{P}(\alpha) \exp \left\{ - \frac{\left(X - \frac{\alpha^*(\mu + i\nu) + \alpha(\mu - i\nu)}{\sqrt{2}} \right)^2}{\mu^2 + \nu^2} \right\} d^2\alpha. \quad (1.62)$$

Интегрирование ведется по всей комплексной плоскости $d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha$. Например, вакуумное состояние квантового осциллятора $|0\rangle\langle 0|$ имеет весовую функцию $\mathcal{P}(\alpha) = \delta(\text{Re}\alpha)\delta(\text{Im}\alpha)$. По формуле (1.56) находим томограмму основного состояния:

$$w_0(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \exp \left\{ - \frac{X^2}{\mu^2 + \nu^2} \right\}. \quad (1.63)$$

Можно получить то же выражение с помощью формулы (1.49), подставив туда волновую функцию основного состояния (1.22). В качестве иллюстрации приме-

нения КВТ, вычислим СТ состояния числа заполнения $|n\rangle$ с волновой функцией $\psi_n(x)$. Подставляя в общую формулу (1.49) для томограммы чистых состояний и пользуясь таблицами [75], после ряда простых преобразований получаем

$$w_n(X, \mu, \nu) = w_0(X, \mu, \nu) \frac{1}{2^n n!} H_n^2 \left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right), \quad (1.64)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита [75], а $w_0(X, \mu, \nu)$ — СТ основного состояния квантового осциллятора.

С помощью общей формулы (1.62) вычислим СТ когерентного состояния $|\alpha\rangle$. Подставляя функцию Глаубера-Сударшана, получаем:

$$w(X, \mu, \nu, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \exp \left\{ -\frac{\left(X - \frac{\alpha^*(\mu + i\nu) + \alpha(\mu - i\nu)}{\sqrt{2}} \right)^2}{\mu^2 + \nu^2} \right\}. \quad (1.65)$$

КВТ когерентного состояния задается распределением Гаусса с параметрами:

$$\langle X \rangle_{\alpha, \mu, \nu} = \mu \langle q \rangle_\alpha + \nu \langle p \rangle_\alpha = \frac{\alpha^*(\mu + i\nu) + \alpha(\mu - i\nu)}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{XX} = \frac{\mu^2 + \nu^2}{2}. \quad (1.66)$$

С учетом (1.66) выражение для томограммы когерентного состояния (1.65) записывается в физически наглядном виде:

$$w(X, \mu, \nu, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{XX}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{XX}} (X - \langle X \rangle_{\alpha, \mu, \nu})^2 \right\}. \quad (1.67)$$

Воспользовавшись выражением для томограммы вакуумного состояния, томограмму когерентного состояния можно также представить в виде

$$w(X, \mu, \nu, \alpha) = w_0(X, \mu, \nu) \exp \left\{ -2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \alpha_1 + \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \alpha_2 \right)^2 \right\} \times \exp \left\{ -2\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_1 + \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_2 \right) X \right\}. \quad (1.68)$$

Поиск квантайзера в виде $\hat{\mathfrak{D}}(\alpha) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, а деквантайзер выберем в форме

$$\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp \left(\frac{1}{2} |u|^2 + \alpha^* u - \alpha u^* \right) \hat{D}(u) d^2 u. \quad (1.69)$$

Условие согласованности системы Вигнера-Вейля (1.26) выполняется

$$\text{Tr} \hat{U}(\alpha) \hat{\mathfrak{D}}(\alpha') = \delta(x - x') \delta(y - y'). \quad (1.70)$$

Дуальный символ обеспечивает так называемую Q -функцию Хусими-Кано [71], [72]:

$$\mathcal{P}^{(d)}(\alpha) = \text{Tr} \hat{\rho} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \pi Q(\alpha). \quad (1.71)$$

Функции Хусими-Кано и $\mathcal{P}$ -функция Глаубера-Сударшана широко применяются в квантовой оптике. Функция Хусими-Кано представляет собой наиболее простое квазираспределение вероятностей системы на фазовом пространстве (α, α^*) когерентных состояний. По определению функция Хусими-Кано пропорциональна распределению вероятности системы $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям $|\alpha\rangle \langle \alpha|$. Поэтому, ясно, что она неотрицательна и нормирована, а именно

$$0 \leq Q(\alpha) \leq \frac{1}{\pi}, \quad \int Q(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (1.72)$$

В качестве иллюстрации рассчитаем функцию Хусими-Кано для произвольного когерентного состояния $\rho_\beta = |\beta\rangle \langle \beta|$. Из (1.71) получаем

$$Q_\beta(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (1.73)$$

Также легко найти Q -функцию для состояния с определенным числом фотонов

$$Q_\beta(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{\alpha^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{\pi n!}. \quad (1.74)$$

Мы видим, что как и классическая томограмма, КВТ содержит исчерпывающую информацию о квантовом состоянии системы. Поскольку состояния системы традиционно связывают с волновой функцией $\psi(x, t)$, возникает вопрос о связи томограммы и волновой функции системы. Для установления этой связи представим общее решение уравнения Шредингера [31] в виде [33]

$$\psi(x, t) = \int G(x, y, t) \psi(y) dy, \quad (1.75)$$

где $G(x, y, t)$ — временная функция Грина, а $\psi(y)$ — состояние системы в начальный момент времени. Если в формуле (1.75) подставить функцию Грина свободной волны, столкнемся с интегральным преобразованием Френеля:

$$\Phi(x) = \int e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \frac{2t}{\sqrt{2\pi it}} dy. \quad (1.76)$$

Если мы теперь совершим преобразование (1.40), то выражение (1.49) для томограммы чистого состояния $|\psi\rangle$ квантового осциллятора (1.75) примет вид

$$w(X, \theta) = \frac{1}{|2\pi i \sin \theta|} \left| \int \exp \left\{ \frac{ictg\theta(x^2 + y^2)}{2} - \frac{ixy}{\sin \theta} \right\} \psi_{osc}(y) dy \right|^2. \quad (1.77)$$

Однако, подынтегральное выражение есть ни что иное как действие функции Грина квантового осциллятора на начальную волновую функцию, поэтому соотношение можно представить в пригодном для физической интерпретации виде

$$w_\psi(X, \theta) = |\psi_{osc}(X, \theta)|^2. \quad (1.78)$$

Функция $w_\psi(X, \theta)$ называется оптической томограммой (ОТ). Формула (1.78) означает, что измеряя амплитуды волновой функции $|\psi_{osc}(X, \theta)|^2$ во все времена существования квантового осциллятора мы можем полностью восстановить начальную волновую функцию $\psi_{osc}(Y)$. Более того, достаточно ограничиться одним периодом колебаний осциллятора. Таким образом, ОТ позволяет непосредственно измерять квантовое состояние [27], [56].

Можно было бы думать, что преобразование (1.77) не полностью переносит информацию содержащуюся в СТ в ОТ. На самом деле никакой потери информации нет из-за общего свойства однородности КВТ $w(\lambda x, \lambda \mu, \lambda \nu) = w(x, \mu, \nu)/|\lambda|$. Отсюда вытекают свойства

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{|\nu|} w\left(\frac{X}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}, 1\right), \quad w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{|X|} w\left(1, \frac{\mu}{X}, \frac{\nu}{X}\right), \quad \nu \leftrightarrow \mu. \quad (1.79)$$

Перейдем в СТ от переменных μ, ν к переменной t по преобразованиям (??). Применяя свойство (1.79) с $\lambda = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, получим:

$$w(X, \mu, \nu) = w\left(X, \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \cos t, \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \sin t\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} w_{opt}(X', t), \quad (1.80)$$

где $X' = \frac{X}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}$. Следовательно, $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} w_{sim}(X, \mu, \nu) = w_{opt}(X', t)$. Таким образом можно из ОТ получить СТ по формуле

$$w_{sim}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} w_{opt}\left(\frac{X}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}, \arctan \frac{\nu}{\mu}\right). \quad (1.81)$$

Получим еще одно представление для томограммы используемое в приложениях. Для этого перепишем СТ в виде

$$w_{sim}(X, \mu, \nu) = w_{sim}\left(\mu \cdot \frac{X}{\mu}, \mu \cdot 1, \mu \cdot \frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} w_{sim}\left(\frac{X}{\mu}, 1, \frac{\nu}{\mu}\right), \quad (1.82)$$

Но подставив в выражение для томограммы $\mu = 1$ получим,

$$w_{sim}(X, 1, \nu) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi i |\nu|}\right)^2} \left| \int \psi(y) e^{\frac{i(x-y)^2}{2\nu}} dy \right|^2 \equiv |\psi(\theta, X)|^2. \quad (1.83)$$

Положив $\nu = \theta$, получаем функцию Грина и по преобразованию Френеля (1.76) волновую функцию свободной волны. Измерив концентрацию конденсата, можем восстановить начальную функцию конденсата. Таким образом, ОТ есть результат дробного Фурье-преобразования волновой функции чистого состояния. Преобразованием же Френеля волновой функции можно заполучить СТ (1.83).

Описание квантомеханических систем посредством оператора плотности эквивалентно описанию через томографические распределения вероятности состояний, т.е. квантовые томограммы. В действительности, пользуясь определением томографии как символа оператора плотности в схеме квантования Вейля, запишем

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) e^{i(X\hat{1} - \mu\hat{q} - \nu\hat{p})} dX d\mu d\nu. \quad (1.84)$$

Получим фиделити с помощью квантовых симплектических томограм. Пользуясь определением фиделити (1.8), подставляем функцию плотности (1.84), выраженную через квантовые томограммы первого и второго состояний, и получаем

$$f_{12} = \frac{1}{4\pi^2} \int dX_1 d\mu_1 d\nu_1 dX_2 d\mu_2 d\nu_2 w_1(X_1, \mu_1, \nu_1) w_2(X_2, \mu_2, \nu_2) \times \\ \times e^{i(X_1+X_2)} \text{Tr}(\exp -i(\mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \exp -i(\mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2)). \quad (1.85)$$

Выражение для следа в подынтегральном выражении легко вычисляется и равно $2\pi\delta(\mu_1 + \mu_2)\delta(\nu_1 + \nu_2)$. Наконец, получаем фиделити состояний 1 и 2:

$$f_{12} = \frac{1}{2\pi} \int dX_1 dX_2 d\mu d\nu w_1(X_1, \mu, \nu) w_2(X_2, -\mu, -\nu) e^{i(X_1+X_2)}. \quad (1.86)$$

Введем томограмму счета фотонов (ТСФ) [53] как символ оператора плотности $w_\gamma(n, \alpha)$ с деквантайзером $\hat{U}_\gamma(\mathbf{x}) = \hat{D}(\alpha)|n\rangle\langle n|\hat{D}^\dagger(\alpha)$, $\mathbf{x} = (n, \alpha)$

$$w_\gamma(n, \alpha) = \langle n|\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)|n\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{U}_\gamma(\mathbf{x})]. \quad (1.87)$$

Оператор плотности $\hat{\rho}$ может быть восстановлен обратимым преобразованием по общим процедурам томографического восстановления состояний [61], [76]. Этот факт установлен в [77], где была получена формула для квантайзера

$$\hat{\mathfrak{D}}_\gamma(\mathbf{x}) = \frac{4}{\pi(1-s^2)} \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^{(\hat{a}^\dagger+\alpha^*)(\hat{a}+\alpha)-n} = \frac{4e^{|\alpha|^2-n}}{\pi} \sinh^2 \omega/2 \exp \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger + \hat{a} \alpha^*), \quad (1.88)$$

где s — параметр, введенный в работе [78], а $\omega = \ln(s-1)/(s+1)$.

1.4. Принцип суперпозиции в вероятностном представлении

В данном подразделе остановимся на вопросе сложения томографических вероятностей [79]. С начала заметим, что если у нас имеется две томограммы $w_{\psi_1}(X, \mu, \nu)$ и $w_{\psi_2}(X, \mu, \nu)$, то их сумма $w'(X, \mu, \nu)$ представляет с собой некое новое распределение томографических вероятностей

$$w'(X, \mu, \nu) = |c_1|^2 w_{\psi_1}(X, \mu, \nu) + |c_2|^2 w_{\psi_2}(X, \mu, \nu), \quad (1.89)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные. Проверим чистое или смешанное состояние описывает (1.89). Применив формулу (1.86) убеждаемся, что параметр частоты состояния (1.89) $\mu' < 1$.

Этот факт побуждает нас думать, что (1.89) дает нам выражение для вероятности смешанного состояния, и мы можем сформулировать правило суммирования томографических вероятностей в виде уравнения

$$w(X, \mu, \nu) = |c_1|^2 w_{\psi_1}(X, \mu, \nu) + |c_2|^2 w_{\psi_2}(X, \mu, \nu) + 2 \operatorname{Re} \{ c_1 c_2^* e^{i\varphi} w_{12}(X, \mu, \nu) \}, \quad (1.90)$$

где член $w_{12}(X, \mu, \nu)$ отражает квантомеханический закон интерференции между двумя амплитудами вероятностей

$$\begin{aligned} w_{12}(X, \mu, \nu) = & \frac{1}{4\pi^2|\nu|} \left(\int w_{\psi}(Y_1, \mu_1, 0) w_{\psi}(Y_2, \mu_2, 0) e^{i(Y_1 - Y_2)} d\mu_1 dY_1 d\mu_2 dY_2 \right)^{-1/2} \times \\ & \times \int \exp i \left(Y_1 - \frac{\mu_1 q_1}{2} - Y_2 + \frac{\mu_2 q_2}{2} + \frac{\mu}{2\nu} (q_1^2 - q_2^2) - X\nu(q_1 - q_2) \right) \times \\ & \times w_{\psi_1}(Y_1, \mu_1, q_1) w_{\psi_2}(Y_2, \mu_2, q_2) dY_1 dq_1 d\mu_1 dY_2 dq_2 d\mu_2 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Квантовые вероятности складываются по закону (1.90), схожему с принципом суперпозиции для векторов состояния в отличие от классической статистической механики.

Рассмотрим класс одномодовых состояний с сильными неклассическими свойствами, состоящих из суперпозиции двух когерентных состояний с равными амплитудами, но с разностью фаз 180° , т.е. состояния вида

$$|\psi\rangle = N(|\beta\rangle + e^{i\phi} |-\beta\rangle), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \cos \phi e^{-2|\beta|^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.92)$$

Для большого количества среднего числа фотонов $\bar{n}_\beta \gg 1$ состояния $|\beta\rangle$ и $|-\beta\rangle$ макроскопически различимы. Класс состояний (1.92) называют состояниями кота Шредингера [29].

Рассчитаем ТСФ состояния кота Шредингера. После несколько длительных, но простых вычислений получаем ТСФ кота Шредингера в виде функции

$$w_\gamma(n, \alpha) = \langle n | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha) | n \rangle = |N|^2 (P_n(\alpha + \beta) + P_n(\alpha - \beta) + I_n(\alpha, \beta)). \quad (1.93)$$

Здесь $P_n(\alpha)$ — распределение вероятностей Пуассона $P_n(\alpha) = e^{-\langle n \rangle_\alpha} \frac{(\langle n \rangle_\alpha)^n}{n!}$, а функция $I_n(\alpha, \beta)$ дается выражением

$$I_n(\alpha, \beta) = 2(-1)^n e^{-(\bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta)} (\bar{n}_\beta - \bar{n}_\alpha) + 4\varphi^2)^{n/2} \cos(n\theta - \phi - 2\varphi), \quad (1.94)$$

где введены углы $\varphi = \text{Im}(\alpha\beta^*)$, $\theta = \arctan \frac{2\varphi}{\bar{n}_\beta - \bar{n}_\alpha}$.

Для четного состояния ($\phi = 0$) и нечетного состояния ($\phi = \pi$) при $\alpha = 0$ из (1.93) получаем, соответственно,

$$w_n^{(+)} = \frac{1}{ch|\beta|^2} \frac{|\beta|^{2n}}{n!} (1 + (-1)^n), \quad w_n^{(-)} = \frac{1}{sh|\beta|^2} \frac{|\beta|^{2n}}{n!} (1 - (-1)^n). \quad (1.95)$$

Для вычисления СП кота Шредингера перейдем к координатному представлению

$$\begin{aligned} w(X, \mu, \nu, \alpha, \phi) &= \frac{|N|^2}{2\pi|\nu|} |I_\alpha + e^{i\phi} I_{-\alpha}|^2 = \\ &= |N|^2 (w_\alpha(X, \mu, \nu) + w_{-\alpha}(X, \mu, \nu) + T_{\alpha, \phi}(X, \mu, \nu)), \end{aligned} \quad (1.96)$$

где

$$I_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} \int \psi_\alpha(x) \exp\left(i\frac{\mu}{2\nu} x^2 - i\frac{Xx}{\nu}\right) dx = \frac{e^{-\alpha_1^2}}{\sqrt{-\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}}} e^{r_1 + ir_2}. \quad (1.97)$$

Функция $w_\alpha(X, \mu, \nu)$ — СТ когерентного состояния, а интерференционный член

$$\begin{aligned} T_{\alpha, \phi}(X, \mu, \nu) &= 2\text{Re}(I_\alpha I_{-\alpha}^* e^{-i\phi}) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \nu^2)}} \exp(r_1(\alpha) + r_1(-\alpha) - 2\alpha_1^2) \cos(r_2(\alpha) - r_2(-\alpha) - \phi) \end{aligned} \quad (1.98)$$

отвечает за суперпозицию между когерентными состояниями $|\alpha\rangle$ и $|\alpha\rangle$. Величины r_1, r_2 задаются уравнениями

$$\begin{cases} r_1(\alpha) = -\frac{2}{\mu^2 + \nu^2} (\nu^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 2\mu\nu\alpha_1\alpha_2 - \sqrt{2}(\alpha_1\mu + \alpha_2\nu)X + X^2/2), \\ r_2(\alpha) = -\frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)\nu} (2\nu^2\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 4\nu^3\alpha_1\alpha_2 - \sqrt{2}(\alpha_2\mu - \alpha_1\nu)X - \mu X^2). \end{cases} \quad (1.99)$$

Подставив значения (1.99) в формулы (1.97) и (1.96), получаем томограмму кота Шредингера в явном виде

$$\begin{aligned}
w(X, \mu, \nu, \alpha, \phi) = & \\
= 2|N|^2 \exp -2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \alpha_1 + \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \alpha_2 \right)^2 w_0(X, \mu, \nu) \times & \\
\times \left\{ \cosh 2\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_1 + \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_2 \right) X + \right. & \\
+ \cos \left(2\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_2 - \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2} \alpha_1 \right) X - \phi \right) \left. \right\}, & \quad (1.100)
\end{aligned}$$

где $w_0(X, \mu, \nu)$ — томограмма вакуумного состояния. При $\alpha = 0, \phi = 0$ выражение для томограммы (1.100) переходит в томограмму вакуумного состояния как и следовало бы ожидать.

1.5. Соотношения неопределенностей в квантовой томографии

Опишем способ экспериментальной проверки соотношений неопределенностей Шредингера-Робертсона (СНШР) [30]. Рассмотрим для этого квантовую систему, у которой N наблюдаемых представляемых операторами $\hat{\Omega}_n, n = 1, 2, \dots, N$.

Средние $\langle \hat{\Omega}_m^\dagger \hat{\Omega}_n \rangle$ составляют матрицы Σ_{mn} , описывающие корреляции между различными квантомеханическими наблюдаемыми. В квантовой механике матрица Σ_{mn} должна быть определена положительно и удовлетворять критериям Сильвестра. Выраженные через средние значения $\langle \hat{\Omega}_m^\dagger \hat{\Omega}_n \rangle$ эти условия и выражают СНШР в общем случае для произвольной квантовой системы. Для системы с одним импульсом и координат СНШР имеют вид

$$\sigma_{qq} \geq 0, \quad \sigma_{pp} \geq 0, \quad \sigma_{qq}\sigma_{pp} \geq \frac{\hbar^2}{4} + \sigma_{pq}^2. \quad (1.101)$$

Оценим последнее неравенство (1.101) для некоррелированных состояний, $\sigma_{qp} = 0$. Так для оценки соотношения неопределенностей Гейзенберга нам достаточно

знать одну экспериментально наблюдаемую функцию распределения $w_\psi(X, \mu, \nu)$ в двух фиксированных системах координат $\mu = 1, \nu = 0$ и $\mu = 0, \nu = 1$. С учетом вышесказанного, соотношение неопределенностей в томографическом представлении квантовых состояний может быть записано в виде

$$\int w_\psi(X, 1, 0) X^2 dX \cdot \int w_\psi(X, 0, 1) X^2 dX \geq \frac{1}{4}. \quad (1.102)$$

Итак, с помощью вероятностного представления квантовых состояний, возможна экспериментальная проверка соотношений неопределенностей Гейзенберга по непосредственным измерениям значений томограммы $w(X, \mu, \nu)$ [21].

1.6. Основные выводы и результаты

В первой главе рассмотрены классические и квантовые симплектические томограммы состояний с непрерывным спектром наблюдаемых и описаны квантовые состояния в КВТ. Показано, что измерение квантовых состояний можно свести к измерению оптической томограммы. Важнейшие положения квантовой механики сформулированы в терминах КВТ, что позволяет рассматривать классические и квантовые состояния с единой вероятностной точки зрения. Приведены результаты расчета томограммы счета фотонов для состояний кота Шредингера и сформулировано СНШР. Томографическое описание классических и квантовых состояний было опубликовано в работе [137] и обсуждалось на конференции [138].

Глава 2

Квантовая томография спиновых состояний

Во второй главе излагаются приложения спиновой томографии к некоторым задачам КВТИ. Формализм томографических символов спиновых операторов применительно к проблемам КВТИ был разработан в работе [24]. Спиновая томография является конкретной реализацией вероятностного описания квантовых систем с дискретными наблюдаемыми. Она нашла применение в квантовой теории информации и в проблеме сепарабельности многочастичных состояний [20].

Фундаментальной единицей классической информации является бит [80]. Под битом также понимают физическую систему, описываемую случайной дискретной величиной, которая принимает значения 0 или 1. Кубитом называется аналог частицы со спином $1/2$ или любая другая квантовая двухуровневая система. Кубит является фундаментальной единицей и источником квантовой информации. Примерами конкретных реализаций кубита могут служить состояния света с горизонтальной и вертикальной поляризациями, двухуровневые атомы или ионы.

Измерение в квантовой механике представляет собой неунитарный, нелокальный, стохастический процесс, вызванный взаимодействием измерительного прибора с квантовой системой. Такие свойства измерений в квантовой механике приводят к невозпроизводимости квантового состояния [81].

В параграфе 2.1 изложен метод описания классических составных систем с дискретными наблюдаемыми. На языке стохастических матриц сформулированы общие условия факторизуемости состояний в классических стохастических моделях. В параграфе 2.2 приводится томографический метод описания составных многокудитных состояний посредством квантовых стохастических матриц. В параграфе 2.3 дано определение унитарной томографии кудита и вводится понятие унитарной томографической энтропии. В параграфе 2.4 определены сепарабель-

ные и запутанные состояния с дискретными и непрерывными наблюдаемыми стохастическими матрицами и показана эквивалентность нового определения стандартному. В явном виде показано как запутанность приводит к возникновению квантовых корреляций в формализме спиновой томографии. В параграфе 2.5 для квантовых систем с непрерывными наблюдаемыми рассмотрены экспериментально детектируемые энтропийные неравенства для СТ и ОТ. Для многокудитных состояний томографические энтропии определяются на стохастических матрицах составной системы. Исследуются свойства совместной и относительной томографических энтропий для запутанных и сепарабельных состояний.

2.1. Томография классических дискретных систем

Вероятностное представление классических систем с дискретными наблюдаемыми [82] базируется на понятиях случайных векторов вероятностей и стохастических матриц [13], [83]. Приведем основные способы описания классических состояний составных дискретных систем, которые в дальнейшем послужат основой для построения локальных стохастических теорий для выполнения неравенств Белла.

Пусть $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |i\rangle, \dots, |n\rangle$ — состояния некой дискретной классической системы со случайными величинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$. Обозначим буквами w_i вероятности нахождения системы в каждом из состояний $|i\rangle$. Изобразим распределение вероятностей системы в виде n -мерного вектора вероятностей

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Осуществим цикл измерений наблюдаемых системы. Набор вероятностей переходов задается числами w_{ij} , обозначающими вероятности перехода из начального

состояния $|i\rangle$ к конечному $|k\rangle$. В силу этого для любых i и k

$$0 \leq w_{ik} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n w_{ik} = 1, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Если из элементов w_{ik} составить матрицу M , то она будет содержать информацию о всех состояниях системы при n измерениях

$$M = \begin{pmatrix} w_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & w_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & \dots & w_{1n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) \\ w_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & w_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & \dots & w_{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & w_{n2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) & \dots & w_{nn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Квадратные матрицы M со свойствами (2.2) называются стохастическими¹. Общие математические свойства стохастических матриц хорошо известны [83]. В работе [84] была выявлена связь между свойством матриц образовывать полугруппы с томографическими распределениями вероятностей состояний кубитов и кудитов. Рассмотрим эту связь в случае многокудитных состояний.

Дискретная классическая система может быть описана вектором вероятности (2.1), а статистический ансамбль таких систем — стохастической матрицей (2.3). Случайные величины $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$ можно интерпретировать как классические наблюдаемые отдельных подсистем размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$. Каждая из подсистем при этом описывается классической дискретной томограммой (2.1) $\mathbf{x}_i$ размерности d_i или стохастической матрицей вида

$$M_{\mathbf{x}_i}^{(d_i)} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,d_i-1} & x_{1,d_i} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,d_i-1} & x_{2,d_i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{d_i-1,1} & x_{d_i-1,2} & \dots & x_{d_i-1,d_i-1} & x_{d_i-1,d_i} \\ x_{d_i,1} & x_{d_i,2} & \dots & x_{d_i,d_i-1} & x_{d_i,d_i} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

¹ В теории стохастических Марковских процессов такие матрицы называют матрицами перехода.

где $x_{j,k}$, при $j, k = 1, 2, \dots, d_i$ — вероятности проявления j состояния кудита при k измерении. В общем случае матрица (2.4) содержит $d_i^2 - d_i$ независимых вероятностей, составляющих вектор $\mathbf{q}_i = (x_{1,1}, x_{d_i-1,1}, x_{1,2}, x_{d_i-1,2}, \dots, x_{1,d_i-1+1}, x_{d_i-1,d_i-1+1})$.

В общем случае совместная функция распределения составной системы может быть представлена вектором (2.1) $\mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ размерности $d = d_1 d_2 \dots d_n$. Стохастическая матрица (2.3) составной классической системы будет иметь вид матрицы $d \times d$ со столбцами, состоящими из томографических векторных распределений $\mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Если функция распределения (2.1) составной системы может быть представлена в виде тензорного произведения классических дискретных томограмм $\mathbf{w}(\mathbf{x}_i)$, то будем говорить, что классическое состояние факторизуется. По аналогии с квантовой статистической механикой будем называть такое состояние также сепарабельным.

Классическое и квантовое описание систем с дискретными наблюдаемыми расходятся в значениях, которые может принимать вектор $\mathbf{x}$. В классическом случае вероятности $x_{i,k}$ могут принимать значения только между 0 и 1. В квантовом случае столбцы матрицы (2.4) являются квантовыми томограммами (2.14) и становятся непрерывными функциями от углов Эйлера, соответствующих направлениям квантования момента $\mathbf{j}$ кудита.

В случае одного бита ($n = 2$), согласно (2.1) и (2.4), томограмма и стохастическая матрица $M_{\mathbf{x}}$, соответствующая исходам измерений “+” и “-”, задаются формулами

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} w(+) \\ w(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}, \quad M_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 - x_1 & 1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где x_1, x_2 вероятности одинаковых исходов “+” при двух измерениях 1 и 2. Здесь мы условно обозначили “+” и “-” значения дискретной наблюдаемой принимаемых в двух возможных состояниях бита. Распределение вероятностей бита лежит

на одномерном симплексе.

Для расчета вероятностных характеристик системы из двух битов необходимо рассмотреть два вектора вероятностей $\mathbf{w}(x_i) = (x_i, 1 - x_i)^T$ для первого кубита и два вектора вероятностей $\mathbf{w}(y_j) = (y_j, 1 - y_j)^T$ для второго кубита, где $0 \leq x_i, y_j \leq 1$, $i, j = 1, 2$. Заранее известно, что распределение вероятностей в составной системе будет задаваться векторами $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Если распределение вероятностей $w(x_1, x_2, y_1, y_2)$ факторизуется, то стохастическая матрица составной системы будет $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}}$. Аналогичным образом, стохастическая матрица $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}}$ факторизуемого состояния трех битов может быть найдена либо по формуле $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}} \otimes M_{\mathbf{z}}$, либо составлена из тензорных произведений вероятностных векторов $\mathbf{w}(x_i)$, $\mathbf{w}(y_j)$, $\mathbf{w}(z_k)$, $i, j, k = 1, 2$. Первый столбец матрицы $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}}$ будет состоять из элементов $x_1 y_1 z_1$, $x_1 y_1 z_2$, $x_1 y_2 z_1$, $x_1 y_2 z_2$, $x_2 y_1 z_1$, $x_2 y_1 z_2$, $x_2 y_2 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ и т.д.

Рассмотрим обратную задачу восстановления томограмм отдельных битов по заданной томограмме $w(n, m)$ составной системы, где n, m принимают значения “+” и “-”, соответственно. Маргинальные распределения вероятностей подсистем представятся двумерными векторами вероятностей с элементами $w_n^{(1)}$ и $w_m^{(2)}$, т.е. двумерными векторами $\mathbf{w}^{(1)}$ и $\mathbf{w}^{(2)}$ с элементами

$$w_n^{(1)} = \sum_m w_{nm}^{(12)}, \quad w_m^{(2)} = \sum_n w_{nm}^{(12)}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} w(++) + w(+-) \\ w(-+) + w(--) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{(2)} = \begin{pmatrix} w(++) + w(-+) \\ w(+-) + w(--) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим классическую томограмму трита ($n = 3$). Условимся обозначать состояния трита “-”, “0”, “+”. Томограмма и стохастическая матрица трита, соглас-

но (2.1) и (2.4), даются формулами

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} w(+)\cr w(-)\cr w(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\cr z_2\cr 1 - z_1 - z_2\end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$M_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1\cr r_2 & s_2 & t_2\cr 1 - r_1 - r_2 & 1 - s_1 - s_2 & 1 - t_1 - t_2\end{pmatrix}$$

где r_1, s_1, t_1 вероятности исходов “+”, а r_2, s_2, t_2 вероятности исхода “-” при трех разных измерениях 1, 2, 3.

Если задана система из любого количества битов и тритов с факторизуемой функцией распределения, то по формулам (2.5)-(2.8) можно записать функции совместного распределения вероятностей в виде произведений $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{z})$ или $M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}}$. Если же состояние составной системы не факторизуется, то томограмма представима в виде линейной суперпозиции тензорных произведений томограмм составных подсистем. Если стохастична не только M , но и M^T (сумма всех строк и столбцов равны +1), то матрица M называется бистохастической [83]. Очевидно, этому случаю соответствуют системы со свойством симметрии по отношению к переходам между различными состояниями.

Рассмотрим некое d -уровневое состояние, которое запишем в виде вектора вероятности $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)^T$. Допустим, данное состояние сепарабельное. Тогда найдутся такие векторы состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{d_1-1})^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, 1 - y_1 - y_2 - \dots - y_{d_2-1})^T$, что будет справедливо уравнение $\mathbf{w} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$. Для удовлетворения этого уравнения необходимо положить, что $d = d_1 d_2$

В дальнейшем будем опускать символ j из соображений краткости записи.

Вероятности $w(m)$ обнаружения тех или иных значений проекции m на ось квантования даются диагональными элементами матрицы плотности (2.11).

$$w(m) = \rho_{mm} = \langle j, m | \hat{\rho} | j, m \rangle, \quad \sum_{m=-j}^j w(m) = 1. \quad (2.12)$$

Определим томограмму спиновых состояний как вероятность (2.12) в повернутой системе координат [36], [85], [86] с новой осью квантования $\mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma)$

$$w(m, \hat{U}) = \langle m | \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger | m \rangle, \quad m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j. \quad (2.13)$$

Здесь $U(\alpha, \beta, \gamma)$ матрица унитарного оператора $2j+1$ -мерных вращений спиновых состояний $|j, m\rangle$, а α, β, γ — углы Эйлера. Теория операторов вращения $U(\alpha, \beta, \gamma)$ изложена в большинстве учебниках по квантовой механике [31]), [33], [87]. В развернутом виде томограмма (2.13) задается в виде $2j+1$ -мерного вектора

$$\mathbf{w}_{\hat{\rho}}^j(\hat{U}) = \begin{pmatrix} \langle -j | \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger | -j \rangle \\ \langle -j+1 | \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger | -j+1 \rangle \\ \dots \\ \langle j-1 | \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger | j-1 \rangle \\ \langle j | \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger | j \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Определение томограммы в виде дискретного распределения вероятностей или в виде вектора вероятности (2.14) корректно в силу свойств:

1. Томограмма спиновых состояний является положительно определенной функцией от проекции спина m и углов Эйлера α, β, γ

$$w(m, \alpha, \beta, \gamma) \geq 0. \quad (2.15)$$

2. Томограмма (2.14) нормирована на единицу

$$\begin{aligned} \sum_{m=-j}^j \int \frac{do}{8\pi^2} w(m, \alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{m=-j}^j \sum_{m_1=-j}^j \sum_{m_2=-j}^j \rho_{m_1 m_2} \int \frac{do}{8\pi^2} U_{m m_2}^* U_{m m_1} = \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \sum_{m_1=-j}^j w(m_1) = 1, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $do = \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma$ — элемент телесного угла. При получении условия нормировки томограммы учтено свойство ортогональности матриц вращения $U_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$, и томограммы определены как распределения вероятностей.

Покажем теперь, что введенная нами томограмма для дискретного спектра (2.14) совпадает с общим определением томограммы как символа оператора плотности. Для этого перепишем томограмму (2.14) так, чтобы была наглядна схема квантования посредством звездочного произведения из параграфа 1.1. Введем действительный вектор $\mathbf{x} = (m, \alpha, \beta, \gamma)$ и оператор $\hat{U}(\mathbf{x})$ с единичным следом $Tr \hat{U}(\mathbf{x}) = \langle m | U U^\dagger | m \rangle = 1$

$$\hat{U}(\mathbf{x}) = U^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) |m\rangle \langle m| U(\alpha, \beta, \gamma). \quad (2.17)$$

Покажем, что оператор (2.17) является деквантайзером спиновой томограммы. С учетом введенных определений выражение (2.13) для спиновой томограммы можно записать в виде

$$w(\mathbf{x}) \equiv w(m, \hat{U}) = Tr \hat{\rho} U^\dagger(\mathbf{n}) |m\rangle \langle m| U(\mathbf{n}) = Tr \hat{\rho} \hat{U}(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

В соответствии со схемой квантования параграфа 1.1 и на основании определения квантайзера и деквантайзера (2.17) томограмма (2.13) - (2.18) действительно является символом оператора плотности с деквантайзером $\hat{U}(\mathbf{x})$.

Определение (2.13) обратимо, т.е. элементы матрицы плотности выражаются посредством вероятностей $w(m, \alpha, \beta, \gamma)$. Таким образом, состояния с определенным спином j описывается распределением вероятностей $w(m, \alpha, \beta, \gamma)$. С точки

зрения физики этот результат означает, что можно полностью восстановить состояния спина по измерениям проекции спина на ось квантования $\mathbf{n}$ [85]

$$\hat{\rho} = \sum_{m=-j}^j \int \frac{d\alpha}{8\pi^2} w^j(m, U(\alpha, \beta, \gamma)) \hat{D}(m, \alpha, \beta, \gamma), \quad (2.19)$$

где $\hat{\mathfrak{D}}(m, \alpha, \beta, \gamma)$ квантаizer задаваемый формулой

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{D}}(m, \alpha, \beta, \gamma) = \\ = (-1)^m \sum_{j'=0}^{2j} \sum_{m_1, m_2=-j}^j \sum_{m_3=-j'}^{j'} \begin{pmatrix} j & j & j' \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & j' \\ m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times \\ \times (2j' + 1)^2 D_{0m_3}^{(j')}(\mathbf{n}) |jm_1\rangle \langle jm_2|. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle m | \hat{U}^{(j)}(\mathbf{n}) | m' \rangle$ — функции Вигнера, скобки в формуле (2.20) обозначают $3j$ -символы Вигнера. Суммирование в формуле (2.20) производится с учетом условия $m_2 = m_1 + m_3$. Формула (2.19) является аналогом формулы (1.51) для дискретных динамических систем.

Подставим выражение для оператора плотности (2.11) в формулу (2.13), используя свойство функции Вигнера $D_{m,m'}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'} D_{-m,-m'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$. После ряда преобразований представим томограмму спина j в виде

$$w^{(j)}(m, \alpha, \beta) = \sum_{m_1=-j}^j \sum_{m_2=-j}^j \rho_{m_1 m_2} d_{m m_1}^{(j)}(\beta) d_{m m_2}^{(j)}(\beta) e^{i(m_1 - m_2)\alpha}. \quad (2.21)$$

При получении формулы (2.21) были учтены свойства $d_{-m,-m_2}^{(j)}(\beta)(-1)^{m-m_2} = d_{m m_2}^{(j)}(\beta)$. Видно, что томограмма не зависит от третьего угла Эйлера γ . Пользуясь свойством $d_{-m,-m'}^{(j)}(-\beta) = d_{m m'}^{(j)}(\beta)$ легко показать, что томограмма четная функция от $\mathbf{x} = (m, \alpha, \beta, \gamma)$ в соответствии с общими свойствами КВТ (1.79).

$$w^j(m, \alpha, \beta) = w^j(-m, -\alpha, -\beta). \quad (2.22)$$

Свойство (2.22) следует если поменять местами индексы суммирования в формуле (2.21) и одновременно сделать замену α на $-\alpha$, β на $-\beta$.

Итак, томограмму спина j можно вычислить либо по формуле (2.13) либо непосредственно по формуле (2.21) подставляя в нее справочные значения функции $d_{mm'}^{(j)}(\beta)$. Для спина $j = 1/2$ получаем, пользуясь выражением для матрицы $U(\alpha, \beta, \gamma)$ из [31]

$$\mathbf{w}^{(1/2)}(\rho, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} w(+1/2, \mathbf{n}) \\ w(-1/2, \mathbf{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{22} \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin \beta \operatorname{Re} \rho_{12} e^{i\alpha} \\ \rho_{11} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \rho_{22} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \beta \operatorname{Re} \rho_{12} e^{i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Томограмму кубита можно также переписать в параметризации Стокса. В этом форме спиновая томограмма (2.23) есть вектор

$$\mathbf{w}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \xi_3 \cos \beta + \xi_1 \cos \alpha \sin \beta - \xi_2 \sin \alpha \sin \beta \\ \frac{1}{2} - \xi_3 \cos \beta - \xi_1 \cos \alpha \sin \beta + \xi_2 \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

С помощью представления (2.24) свойство однородности томограммы можно выразить уравнением $\mathbf{w}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{w}^{(1/2)}(-\alpha, -\beta, -\boldsymbol{\xi})$.

Для спина $j = 1$, пользуясь явным видом матрицы конечных вращений $D^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma)$, спиновая томограмма представится трехмерным вектором вероятности $\mathbf{w}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = (w^{(1)}(+1, \alpha, \beta, \gamma), w^{(1)}(0, \alpha, \beta, \gamma), w^{(1)}(-1, \alpha, \beta, \gamma))^T$. Соответствующие функции $w^{(1)}(m, \alpha, \beta, \gamma)$ представляют собой симметрические тригонометрические многочлены. Ввиду громоздкости сами общие выражения не представляют особой ценности. Приведем ниже несколько примеров томограммы спина $j = 1$ для различных смешанных и чистых состояний вычисленные по общей формуле (2.21).

$$\mathbf{w}_{+1}^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} (1 + \cos \beta)^2/4 \\ \sin^2 \beta/2 \\ (1 - \cos \beta)^2/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{-1}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \beta)^2/4 \\ \sin^2 \beta/2 \\ (1 + \cos \beta)^2/4 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Максимальная энтропии в этих состояниях равны $\frac{3 \ln 2}{2} < \ln 3$. Таким образом, находясь в состоянии с проекцией спина ± 1 невозможно дойти до верхней границы

энтропии $\ln 3$. Томограмма состояния с проекций спина $m = 0$ равна

$$\mathbf{w}_0^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \sin^2 \beta/2 \\ \cos^2 \beta \\ \sin^2 \beta/2 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

График томографической энтропии состояния (2.26) приведена на рисунке 2.1. Из нее видно, что томографическая энтропия ограничена сверху максимальным значением $H = \ln 3$, который достигается при измерении спина по направлению угла $\beta = \arctan 2 \approx 63^\circ$. Из рисунка 2.1 также видно, что помимо глобального минимума $H = 0$, томографическая энтропия имеет локальный минимум $H = \ln 2$ при $\beta = \pi/2$. В случае максимально смешанного состояния $\rho_m = 1/3$ томограм-

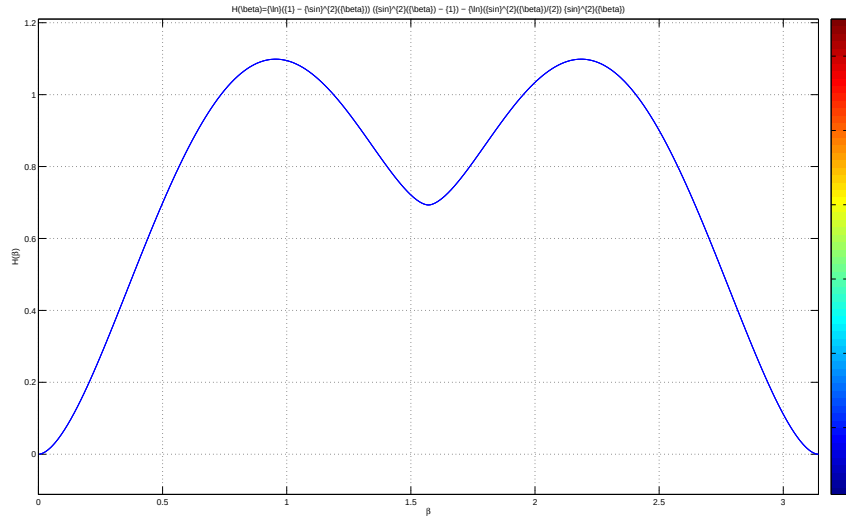


Рисунок 2.1 – Томографическая энтропия чистого состояния кутрита с проекцией спин $m=0$

ма (2.21) переходит в равномерное распределение $\mathbf{w}_{max}^{(1)} = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ с максимальной энтропией $\ln 3$.

Итак, квантовое состояние дискретной динамической системы, на примере собственных состояний оператора момента, полностью задается $2j + 1$ -мерным вектором вероятности (2.14). Соответственно, квантовые состояния двух частиц

с моментами j_1 и j_2 могут быть представлены томограммой [84], [94]

$$w(m_1, m_2, \hat{U}_1, \hat{U}_2) = \langle m_1 m_2 | \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 \hat{\rho} \hat{U}_2^\dagger \otimes \hat{U}_1^\dagger | m_1 m_2 \rangle, \quad (2.27)$$

$$m_i = -j_i, \dots, j_i, \quad i = 1, 2.$$

Для системы из двух моментов j_1, j_2 выражение (2.27) даст нам вероятностный вектор $\mathbf{w}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ с $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ компонентами, где $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ направления квантования соответствующих моментов.

Обобщение на случай N кудитов с моментами $j_1, j_2, \dots, j_N$ очевидно. В общем случае совместная квантовая функция распределения вероятностей составной системы из N кудитов определяется как спиновая томограмма

$$w(m_1, m_2, \dots, m_N, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N) =$$

$$= \langle m_1, m_2, \dots, m_N | \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 \otimes \dots \otimes \hat{U}_N \hat{\rho} \hat{U}_N^\dagger \otimes \dots \otimes \hat{U}_2^\dagger \otimes \hat{U}_1^\dagger | m_1, m_2, \dots, m_N \rangle, \quad (2.28)$$

где проекции моментов m_i пробегают значения $-j_i, \dots, j_i$ для всех кудитов системы, $i = 1, 2, \dots, N$, операторы $\hat{U}_i$ отвечают за неприводимые $2j_i + 1$ -представление группу вращений и могут быть представлены $(2j_i + 1)(2j_i + 1)$ матрицами.

Вернемся снова к случаю одного кубита. Томограмма описывает состояния кубита с той же полнотой, что и матрица плотности. Однако, она описывает состояния кубита только при однократном измерении момента кубита вдоль угла $\mathbf{n}$. Часто в оптических опытах требуется описать состояния квантовых систем сразу с несколькими углами измерений. Это соответствует случаю, когда в качестве углов измерения нужно считать углы самих экспериментальных установок, например, фотосчетчиков.

Теория стохастических матриц подсказывает нам как можно из спиновых томограмм построить стохастические матрицы, которые будут описывать системы с несколькими возможными углами наблюдения. Для того, чтобы описать состояния кубита с двухканальным детектированием, мы фиксируем два единичных

вектора $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ и строим стохастическую матрицу из соответствующих векторов вероятностей

$$M^{(1/2)}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \begin{pmatrix} w^{(1/2)}\left(+\frac{1}{2}, \mathbf{n}_1\right) & w^{(1/2)}\left(+\frac{1}{2}, \mathbf{n}_2\right) \\ 1 - w^{(1/2)}\left(+\frac{1}{2}, \mathbf{n}_1\right) & 1 - w^{(1/2)}\left(+\frac{1}{2}, \mathbf{n}_2\right) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Матрица (2.29) дает такое же полное (точнее, переполненное) описание квантового состояния кубита как и квантовая томограмма (2.23) и соответственно может полностью заменить обычное описание квантовых состояний посредством матрицы плотности или волновых функций (в случае спиновых систем спиноров [84]). Действительно, если задана матрица (2.29), то ее столбцы представляют собой квантовые томограммы, по любым из которых можно восстановить матрицу плотности состояния по формуле (2.19).

Однако, в отличие от обычного описания квантовых состояний, описание состояний посредством стохастических матриц (2.29) обладает тем преимуществом, что оно позволяет построить математический аппарат для предсказания тех или иных исходов экспериментов с несколькими положениями детекторов. Например, матрица (2.29) позволяет переписать средние значения для квантовых корреляций в многочастичных системах так, что можно сразу заполучить универсальный формализм для описания обобщенных неравенств Белла [137]).

Определение стохастической матрицы, описывающей состояния кубита можно ввести и для произвольных кудитов. В самом деле, для этого необходимо зафиксировать $2j + 1$ возможных измерений (показаний детектора, например) и для каждого из них определить спиновую томограмму (2.14). Из них и будет состоять стохастическая матрица $M^{(j)}$. Каждый из столбцов матрицы $M^{(j)}$ позволяет восстановить одну и ту же матрицы плотности ρ , что соответствует $2j + 1$ кратному вырождению спиновых состояний по значениям проекции спина.

В явном виде стохастическая матрица кудита с $2j + 1$ направлениями изме-

рения будет иметь вид

$$M^{(j)}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{2j+1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} w^{(j)}(j, \mathbf{n}_1) & w^{(j)}(j, \mathbf{n}_2) & \dots & w^{(j)}(j, \mathbf{n}_{2j+1}) \\ w^{(j)}(j-1, \mathbf{n}_1) & w^{(j)}(j-1, \mathbf{n}_2) & \dots & w^{(j)}(j-1, \mathbf{n}_{2j+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w^{(j)}(-j+1, \mathbf{n}_1) & w^{(j)}(-j+1, \mathbf{n}_2) & \dots & w^{(j)}(-j+1, \mathbf{n}_{2j+1}) \\ w^{(j)}(-j, \mathbf{n}_1) & w^{(j)}(-j, \mathbf{n}_2) & \dots & w^{(j)}(-j, \mathbf{n}_{2j+1}) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Аналогичным образом, можно построить стохастическую матрицу двух кудитов. Для этого необходимо фиксировать $2j_1+1$ направлений $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2j_1+1}$ для первого момента и $2j_2+1$ направлений $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2j_2+1}$ для второго момента. В результате мы получим стохастическую матрицу $(2j_1+1)(2j_2+1) \times (2j_1+1)(2j_2+1)$, столбцы которой составлены из векторов $\mathbf{w}_i(\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2})$ и рассчитаны по формуле (2.27), где $k_1 = 1, 2, \dots, 2j_1+1$, $k_2 = 1, 2, \dots, 2j_2+1$.

В общем случае N кудитов с моментами $j_1, j_2, \dots, j_N$ распределение вероятностей можно описать d -мерным томографическим вектором (2.28), где $d = (2j_1+1)(2j_2+1) \dots (2j_N+1)$. Это приводит к определению $d \times d$ -мерной стохастической матрицы содержащих $(2j_1+1) + (2j_2+1) + \dots + (2j_N+1)$ направлений измерений

$$M^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}(\mathbf{n}_{j_1} \dots, \mathbf{n}_{-j_1}; \mathbf{n}_{j_2} \dots, \mathbf{n}_{-j_2}; \dots, \mathbf{n}_{j_N} \dots, \mathbf{n}_{-j_N}) =$$

$$= \begin{pmatrix} w(j_1, \dots, j_N, \mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_N}) & \dots & w(j_1, \dots, j_N, \mathbf{n}_{-j_1}, \dots, \mathbf{n}_{-j_N}) \\ \dots & \dots & \dots \\ w(-j_1, \dots, -j_N, \mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_N}) & \dots & w(-j_1, \dots, -j_N, \mathbf{n}_{-j_1}, \dots, \mathbf{n}_{-j_N}) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Каждый элемент матрицы (2.31) соответствует определенной спиновой томограмме, которая рассчитывается по формуле (2.28).

Поскольку каждое из этих направлений содержит по два угла Эйлера, общее число действительных аргументов входящих в стохастическую матрицу составной системы из N кудитов есть

$$s = \sum_{i=1}^N 2(2j_i + 1) = 4J_{max} + 2N, \quad (2.32)$$

где J_{max} — максимальное значение суммарного момента системы. Итак, мы полностью перенесли понятие КВТ для состояний с непрерывным спектром в область состояний с дискретным спектром на примере собственных состояний момента. Можно сказать, что мы построили вероятностное представление спиновых состояний момента j . Построенное нами представление, как мы убедимся в следующих разделах, имеет много важных приложений.

Квантовую томографию спиновых состояний можно расширить до области релятивистской квантовой механики. Вместо проекции спина частиц t нужно рассмотреть спиральность частиц $\lambda = \mathbf{j}\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ с полным моментом j вдоль направления импульса $\mathbf{k}$. Тогда можно описать состояния свободного квантового электромагнитного поля спиральными томограммами. Отметим, что спиральная томограмма $w(\lambda, \mathbf{n})$ в этом случае имеет смысл квадрата амплитуды поля с определенной спиральностью λ и импульсом $\mathbf{k}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ единичный вектор направления импульса частицы поля вдоль которого квантуется момент $\mathbf{j}$.

2.3. Унитарная томография кудита

Матрицу плотности кубита представим в виде

$$\rho = U_0 \rho_d U_0^\dagger, \quad (2.33)$$

где ρ_d матрица плотности диагонализированная в базисе собственных векторов $\mathbf{u}_1^0$ и $\mathbf{u}_2^0$, а матрица U_0 имеет вид

$$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^0 & \mathbf{u}_2^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_{11}^0 & u_{21}^0 \\ u_{21}^0 & u_{22}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Диагональные элементы матрицы ρ_d представляют собой вероятности нахождения системы в состояниях с проекциями спина вдоль оси z равными $\pm 1/2$

$$\rho_d = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 + \rho_2 = 1. \quad (2.35)$$

Например, собственные числа матрицы плотности (1.7) являются элементами вероятностного вектора $\mathbf{w}_\rho = (w_1(\boldsymbol{\alpha}), w_2(\boldsymbol{\alpha}))^T$, где $w_{1,2}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \pm |\boldsymbol{\alpha}|$.

Как мы выяснили в параграфе 2.2, томограмма квантового состояния определяет распределение вероятностей системы в повернутой системе координат. Поворотам системы координат вдоль главных осей системы на углы α, β, γ соответствует унитарная матрица $U(\mathbf{n})$. Тогда унитарную томограмму кубита можно определить как

$$w(m, U) = \langle m | U^\dagger \rho U | m \rangle = \langle m | (UU_0)^\dagger \rho_d (UU_0) | m \rangle, \quad m = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.36)$$

Подставив сюда выражения для ρ_d и U_0 выше, для распределения вероятностей в повернутой системе получаем

$$\begin{cases} w(\frac{1}{2}, U) = |(UU_0)_{11}|^2 \rho_1 + |(UU_0)_{12}|^2 \rho_2, \\ w(-\frac{1}{2}, U) = |(UU_0)_{21}|^2 \rho_1 + |(UU_0)_{22}|^2 \rho_2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Обозначим $V = UU_0$ и введем бистохастическую матрицу

$$M = \begin{pmatrix} |v_{11}|^2 & |v_{12}|^2 \\ |v_{21}|^2 & |v_{22}|^2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

и вектор вероятности $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)^T$. С помощью этих обозначений выражение для распределения вероятности в повернутой системе координат, т.е. томограмма

кубита (2.37) примет простую форму

$$\mathbf{w}(U) = M(UU_0)\boldsymbol{\rho}. \quad (2.39)$$

Мы видим, что с помощью КВТ состояния кубита можно описать векторами вероятностей (2.39). Матрица же M выполняет функцию сглаживания исходного “острого” распределения $\boldsymbol{\rho}$. Преобразование (2.39) означает, что векторы вероятности преобразовываются стохастическими матрицами. Поскольку преобразование M сохраняет вероятность, томограмма $\mathbf{w}$ допускает геометрическую интерпретацию как точку на симплексе образованной точками $(1, 0)$ и $(0, 1)$ на двумерной плоскости $w(+\frac{1}{2})$, $w(-\frac{1}{2})$. Само же преобразование (2.39) тогда соответствует движению томограммы по отрезке (одномерному симплексу) в сторону сближения или удаления от крайних точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Из соображений симметрии ясно, что необходимо особо выделить равновероятную точку $\mathbf{w}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и отсчитывать движение по мере приближения к ней. Можно было предположить, что движение точки на симплексе снизу и вверх всегда происходит в сторону ее середины, что соответствует увеличению энтропии. В этом можно убедиться и непосредственно расчетом. Фиксируем произвольное распределение $\boldsymbol{\rho}'$

$$\begin{cases} \rho'_1 = m_{11}\rho_1 + m_{12}\rho_2, \\ \rho'_2 = m_{21}\rho_1 + m_{22}\rho_2. \end{cases} \quad (2.40)$$

Допустим, что у начального вектора распределения $\boldsymbol{\rho}$ имеет место $\rho_1 > \frac{1}{2}$, $\rho_2 < \frac{1}{2}$, и выполняется соотношение (2.35). Тогда, пользуясь определениями матрицы M и вектора $\boldsymbol{\rho}$, имеем $\rho'_1 - \rho_1 = 2(1 - m_{11})(\frac{1}{2} - \rho_1) > 0$ и $\rho'_1 > \rho_1$. Аналогичным образом получается $\rho'_2 - \rho_2 = 2(1 - m_{22})(\frac{1}{2} - \rho_2) < 0$, $\rho'_2 < \rho_2$.

Видно, что движение по симплексу действительно стремится к точке равновесия, что естественно из физических соображений. Проведенные элементарные соображения приводят нас к определению энтропии как функции на симплексе

из томографических точек $\mathbf{w}$. Введем томмографическую энтропию для кубита

$$H(U) = -w\left(+\frac{1}{2}, U\right) \ln w\left(+\frac{1}{2}, U\right) - w\left(-\frac{1}{2}, U\right) \ln w\left(-\frac{1}{2}, U\right). \quad (2.41)$$

Из физических соображений ясно, что томмографическая энтропия может достичь минимума только на отображении $U = U_0^{-1}$, поскольку оно соответствует самому острому распределению вероятности $\mathbf{w}(U_0^{-1}) = \boldsymbol{\rho}$. Таким образом, должно быть $H(U) \geq S$, где

$$S = -\text{Tr} \rho_d \ln \rho_d = -\boldsymbol{\rho} \ln \boldsymbol{\rho} = -\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_2 \ln \rho_2 \quad (2.42)$$

совпадает с энтропией фон Неймана для состояния ρ . Итак, энтропия фон Неймана кубита является минимумом томмографической энтропии.

Обобщением кубита на d -мерный случай является d -уровневая дискретная квантовая система и называется кудитом. Изложенную теорию кубита можно непосредственно распространить над кудитами. Для этого достаточно записать матрицу плотности кудита в виде $\rho_{2j+1, 2j+1} = U_0^j \rho_d^j U_0^{j\dagger}$, где $2j+1$ -мерные матрицы U_0^j, ρ_d^j , имеют тот же смысл что и (2.33)–(2.34) обобщенные на случай произвольного момента j .

Вектор вероятности $\boldsymbol{\rho}$ минимизирующей томмографическую энтропию представится в виде $2j+1$ -мерного столбца $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2j+1})^T$. Минимум томмографической энтропии будет равен энтропии фон Неймана для диагонализированной матрице плотности спина j :

$$\min H = S = -\boldsymbol{\rho} \ln \boldsymbol{\rho} \equiv -\sum_{k=1}^{2j+1} \rho_k \ln \rho_k. \quad (2.43)$$

2.4. Сепарабельные и запутанные состояния

Одна из характерных особенностей квантовых состояний заключается в явлении запутанности [29]. Запутанность обнаруживается при измерениях составной

системы. Запутанные состояния имеют экспериментально измеримые свойства, которые позволяют нам отчетливо различать квантовую механику от любых альтернативных классических моделей. Помимо важного теоретического значения для основания квантовой теории вообще запутанность имеет также ряд важных применений в КВТИ.

Пусть $H_1, H_2, \dots, H_N$ конечномерные гильбертовы пространства с базисными состояниями $|\alpha_{i_1}\rangle, |\alpha_{i_2}\rangle, \dots, |\alpha_{i_N}\rangle$, соответственно, где $i_1, i_2, \dots, i_N$ нумеруют базисные вектора пространствах H_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Согласно постулату квантовой механики, пространство состояний составной системы задается тензорным произведением $H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$ и имеет базисные вектора вида $|\alpha_{i_1}\rangle \otimes |\alpha_{i_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{i_N}\rangle$.

Из определения тензорного произведения следует, что любой вектор единичной нормы, т.е. чистое состояние составной системы, может быть записан в виде суперпозиции

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} C_{i_1, i_2, \dots, i_N} |\alpha_{i_1}\rangle \otimes |\alpha_{i_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{i_N}\rangle, \quad (2.44)$$

где $C_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ — комплексные коэффициенты разложения вектора состояния, квадрат которых имеет смысл распределения вероятностей состояний составной системы. В противном случае составное состояние $|\psi\rangle$ называется запутанным.

Если чистое состояние $|\psi\rangle$ может быть представлено в виде $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \dots \otimes |\psi_N\rangle$, оно называется просто сепарабельным. О таких частных случаях говорят также, что состояние $|\psi\rangle$ факторизуется.

Рассмотрим теперь случай смешанных состояний, которые описываются операторами плотности $\hat{\rho}$ в гильбертовом пространстве $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$. Состояние $\hat{\rho}$ называется сепарабельным, если существуют неотрицательные весовые коэффициенты p_k такие, что $\hat{\rho}$ распадется либо в прямое произведение операторов плотностей $\hat{\rho}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ смешанных состояний подсистем, либо является их

суперпозицией

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k^1 \otimes \hat{\rho}_k^2 \dots \otimes \hat{\rho}_k^N, \quad \sum_k p_k = 1. \quad (2.45)$$

В противном случае $\hat{\rho}$ описывает запутанное запутанное состояние. Если $\hat{\rho} = \hat{\rho}(1) \otimes \hat{\rho}(2)$, то состояние $\hat{\rho}$ называют просто сепарабельным.

Рассмотрим наблюдаемую $\hat{A}$ составной системы, которая задается тензорным произведением $\hat{A} = (\hat{A}_1 - \langle A_1 \rangle_1) \otimes (\hat{A}_2 - \langle A_2 \rangle_2) \otimes \dots \otimes (\hat{A}_N - \langle A_N \rangle_N)$ соответствующих подсистем, где $\langle A_i \rangle_j$ есть среднее наблюдаемой A_i в состоянии $\hat{\rho}_j$. Средние значения $\langle A \rangle_{\hat{\rho}}$ по состояниям $\hat{\rho}$ составной системы дают нам корреляции между значениями наблюдаемых A_i измеряемых на опыте [32]. Для сепарабельных состояний состояний (2.45), пользуясь свойствами тензорного произведения, находим

$$\langle A \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_k p_k \prod_{i=1}^N (\langle A_i \rangle_{\hat{\rho}_i^k} - \langle A_i \rangle_{\hat{\rho}_i}) = \sum_k \prod_{l=1}^N p_k \langle A_l \rangle_{\hat{\rho}_l^k} - \prod_{j=1}^N \langle A_j \rangle_j. \quad (2.46)$$

Ясно, что для просто сепарабельных состояний ($k = 1, p_k = 1$) сумма (2.46) равна нулю и состояние системы не содержит никаких корреляций. Аналогичное самое справедливо для наблюдаемых, для которых все средние $\langle A_i \rangle_{\hat{\rho}_i^k} = 0$. Такова ситуация, например, при корреляциях между возможными значениями измеряемых на опыте проекций различных спинов $m_{i_j} = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$, $\langle \hat{M}_{i_j} \rangle = 0$. Здесь индекс i_j нумерует возможные состояния спинов $j = 0, 1/2, 1, \dots$

Однако, если состояние $\hat{\rho}$ составной системы не сепарабельное, квантовые корреляции между проекциями спинов могут оказаться ненулевыми. На опыте тогда могут наблюдаться своеобразные зависимости между возможными значениями измеряемых проекций. В частности, из-за того, что на каждом опыте корреляция $\langle m_1 m_2 \dots m_N \rangle$ должна принимать определенные значения, значения одной проекции спина, вообще говоря, будут предопределять возможные значения всех остальных проекций спинов. Эта ситуация, парадоксальная с точки зрения классической физики, является предсказанием квантовой механики и следствием того, что в запутанном чистом состоянии квантовой системы нельзя говорить с

достоверностью о том, в каком именно состоянии находится ее подсистема. Запутанность лежит также в основе неравенств Белла и БКХШ исследуемой нами в главе 3.

Определения сепарабельности (2.44) и (2.45) легко обобщаются для квантовых систем с непрерывными наблюдаемыми заменой в формулах везде суммирования на интегрирование по соответствующим непрерывным параметрам $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$. Вместо (2.45) необходимо записать

$$\begin{aligned} \rho(q_1, q_2, \dots, q_N, q'_1, q'_1, \dots, q'_N) = \int d^N \mathbf{k} \dots dk_N p(k_1, k_2, \dots, k_N) \times \\ \times \rho(q_1, q'_1, k_1, k_2, \dots, k_N) \rho(q_2, q'_2, k_1, k_2, \dots, k_N) \dots \rho(q_N, q'_N, k_1, k_2, \dots, k_N). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Задача о том, сепарабельное ли данное состояние $\hat{\rho}(1, 2, \dots, N)$ составной системы из N подсистем, в КВТИ называют проблемой сепарабельности. Необходимое условие, которому должно удовлетворить состояние, чтобы быть сепарабельным, называется критерием сепарабельности. Общего критерия сепарабельности до сих пор не существует. Однако, в случае систем небольших размерностей $2 \otimes 2$ и $2 \otimes 3$ существуют критерии, позволяющие отличить сепарабельные и запутанные состояния.

Рассмотрим в качестве примера систему из двух электронов и возьмем суперпозицию состояний с суммарным спином $+1$ и -1

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Состояние (2.48) играет особо важную роль как в квантовой механике, так и в КВТИ. Оно называется состоянием Белла. Вообще, максимально запутанные состояния двух кубитов называются также состояниями Белла. Матрица плотности

состояния Белла (2.48)

$$\rho_B = |B\rangle\langle B| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Состояние Белла (2.48) или (2.49) представляют собой линейную суперпозицию чистых состояний составной системы и, очевидно, является чистым состоянием $\rho_B^2 = \rho_B$. Однако, сами индивидуальные спины 1 и 2 находятся в максимально смешанном состоянии $\rho_{1,2} = 1/2$. В этом нет ничего удивительного, так как, как мы уже видели в разделе 1 (см. формулу (1.4)), чистое состояние можно получить суперпозицией смешанных состояний за счет квантовых корреляций. Энтропия фон Неймана состояния $\rho_{1,2}$ равна $\ln 2$, тогда как энтропия фон Неймана составной системы равна нулю.

Таким образом, (2.49) описывает запутанное чистое состояние. Пусть задано некоторое состояние $\hat{\rho}$ двухуровневой квантовой системы. Существует простое необходимое условие сепарабельности Переса-Городецкого (ПГ) [88], [89]. По заданному состоянию $\hat{\rho}$ строят новое состояние с матрицей плотности в виде

$$\hat{\rho}^{PPT}(12) = \sum_k p_k \hat{\rho}_1^k \otimes (\hat{\rho}_2^k)^T. \quad (2.50)$$

Преобразование, которому мы подвергли исходную сепарабельную матрицу плотности (2.45) для получения (2.50), называют преобразованием частичного транспонирования или PPT -преобразованием. Очевидно, PPT -преобразованный оператор (2.45) является оператором плотности. Тогда из условия неотрицательности $\hat{\rho}^{PPT}$ должно быть $\langle m | \hat{\rho}^{PPT} | m \rangle \geq 0$ для произвольного базиса $|m\rangle$. Если же хоть одно собственное значение матрицы $\hat{\rho}^{PPT}$ окажется отрицательными, то состояние $\hat{\rho}$ — запутанное.

Подчеркнем еще раз, что критерий сепарабельности ПГ является лишь необходимым, но не достаточным условием. По существу, критерий ПГ выражает всего

лишь тот факт, что при частичном транспонировании сепарабельные состояния переходят в друг друга.

С помощью критерия ПГ убедимся в том, что состояние Белла (2.49) запутанное. Применив преобразование PPT к матрице (2.49) получаем

$$\hat{\rho}_{ee}^{PPT} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Однако среди собственных значений матрицы (2.51) есть отрицательное значение $\lambda = -1$, что нарушает условие положительности матрицы $\hat{\rho}_{ee}^{PPT}$. Следовательно, состояние Белла действительно запутанное.

Применим теперь изложенную теорию к состояниям Вернера [90]

$$\rho_W(12) = \begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \hat{1} + \frac{p}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

При $p = 1$ состояние Вернера переходит запутанное состояние Белла (2.49).

Сначала убедимся, в том, что матрица (2.52) действительно является матрицей плотности некоторого квантового состояния. Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_1 = 1/4(1 + 3p)$, $\lambda_{2,3,4} = (1 - p)/4$. Требование положительности матрицы плотности (2.52) приводит к условию $-1/3 \leq p \leq 1$. Аналогично находятся собственные значения матрицы $\rho_W^{PPT}(1, 2)$, $\lambda_1^{PPT} = (1 - 3p)/4$, $\lambda_{2,3,4}^{PPT} = (1 + p)/4$. Отсюда вытекает, что состояние Вернера сепарабельно на интервале $-1/3 < p < 1/3$ и запутанно на интервале $1/3 < p < 1$.

Сепарабельность и запутанность квантовых состояний можно сформулировать на языке квантовых томограмм. Данное N -частичное состояние сепарабельно, если его томограмму $w(m_1, m_2, \dots, m_N, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N)$ можно представить в

виде выпуклой суммы просто сепарабельных томограмм, т.е. найдется распределение вероятностей p_k , $k = 1, 2, \dots$, такое, что справедлива формула:

$$\begin{aligned} w^{(12)}(m_1, m_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, m_N, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N) = \\ = \sum_k p_k w^k(m_1, \mathbf{n}_1) w^k(m_2, \mathbf{n}_2) \dots w^k(m_N, \mathbf{n}_N). \end{aligned} \quad (2.53)$$

В частности, если состояние сепарабельно, его можно представить в виде одного члена суммы (2.53). С помощью представления томограммы в виде $2j + 1$ -мерных векторов критерий сепарабельности (2.53) можно выразить так же уравнением

$$\mathbf{w}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N) = \sum_k p_k \mathbf{w}_1^k(\mathbf{n}_1) \otimes \mathbf{w}_2^k(\mathbf{n}_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{w}_N^k(\mathbf{n}_N). \quad (2.54)$$

Итак, мы сформулировали критерий сепарабельности на языке квантовых томограмм либо в форме (2.53), либо в векторной форме (2.54).

Измерения, проводимые над системой из двух кубитов, с целью выяснить в каком из четырех состояний Белла они находятся, называются измерениями Белла. Ясно, что если кубиты до измерения не находились в каком-нибудь из состояний Белла до измерения, то в результате измерений Белла система с определенной вероятностью окажется запутанной. На этом факте основана экспериментальная реализация запутанных состояний.

В текущих опытах в качестве кубитов рассматриваются фотоны. Недостаток получения запутанных состояний с фотонами в том, что оптическими методами невозможно различить два состояния Белла друг от друга. Полная экспериментальная различимость состояний Белла достигается в тестах Белла с ионными кубитами в опытах ионных ловушек [91].

Из определений сепарабельности (2.53) и (2.54) вытекает, что в общем случае N -кудитов с моментами j_i сепарабельным квантовым состояниям будут соответ-

ствовать суммы матричных произведений вида

$$\begin{aligned} M^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}(\mathbf{n}_{-j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_1}; \mathbf{n}_{-j_2}, \dots, \mathbf{n}_{j_2}; \dots; \mathbf{n}_{-j_N}, \dots, \mathbf{n}_{j_N}) = \\ = \sum_k p_k \prod_{i=1}^N \otimes M_k^{(j_i)}(\mathbf{n}_{-j_i}, \dots, \mathbf{n}_{j_i}). \end{aligned} \quad (2.55)$$

В формуле (2.55) каждая из матриц $M^{(j_i)}$ представляет собой стохастическую матрицу i -го кудита, задаваемую формулой (2.30). Для упрощения записи в формуле (2.55) $2j_i + 1$ направления измерения соответствующее i -му кудиту нумеруются значениями проекции момента $m_{i_j} = -j_i, \dots, j_i$.

С другой стороны, матрица $M^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}$ представляет собой стохастическую матрицу N -кудитного состояния, элементы которой задаются по общей формуле (2.31). Поэтому определение (2.55) представляет собой уравнение на коэффициенты p_k при произвольных значениях углов измерений задаваемых парой углами Эйлера для каждого из направлений.

Рассмотрим теперь систему из двух кутритов. Достаточно выбрать состояние в котором будет возможно детектирование трех исходов проекции суммарного спина. Для этого, очевидно, можно использовать когерентную суперпозицию трех состояний двух кутритов со суммарным спином $+2$, 0 и -2 соответственно

$$|B_{3\otimes 3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right\}. \quad (2.56)$$

Итак, для расчета запутывания для двух кутритов достаточно рассмотреть матрицу плотности $\hat{\rho}_{B_{3\otimes 3}} = |B_{3\otimes 3}\rangle\langle B_{3\otimes 3}|$, у которой все элементы нулевые кроме $\rho_{11} = \rho_{15} = \rho_{19} = \rho_{51} = \rho_{55} = \rho_{59} = \rho_{91} = \rho_{95} = \rho_{99} = 1/3$. С другой стороны, для двух кутритов у нас не имеется никакого простого критерия сепарабельности аналогичного критерию ПГ. Точно так же можно составить запутанные состояния трех кубитов или двух кубитов и двух кутритов и т.д. В качестве важного класса

запутанных многокудитных состояний укажем на N -кубитное состояние [45], [46]

$$|GHZ\rangle = \frac{|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes \dots \otimes |+\rangle_N + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \otimes \dots \otimes |-\rangle_N}{\sqrt{2}} \quad (2.57)$$

Первые успешные опыты по измерению квантовых корреляций в состоянии (2.57) были поставлены в 1998 г. А. Цайлингером. Данные корреляции используются в квантовой криптографии.

2.5. Томографические энтропии мультикудитных состояний

Метод квантования состояний с помощью томограмм заключается в том, что с начала строятся классические томограммы, а затем в них классические распределения вероятностей заменяют квантовыми. Рассмотрим данную схему квантования для понятия информационной энтропии, т.е. построим квантовую теорию информационной энтропии, начиная при этом с классической теории.

Мы обобщаем понятия энтропии Шеннона и фон Неймана [12], [66] для мультикудитных состояний в квантовой томографии. Мы знаем, что если состояние сепарабельное, то оно удовлетворяет неравенствам БКХШ. Однако мы также понимаем [24], что знания чисел Белла квантового состояния недостаточно для определения сепарабельности или запутанности состояния составной системы. Между числами Белла и сепарабельностью квантовых состояний не существует взаимно однозначного соответствия [138].

При этом мы будем следить за работами [24], [92], [93] для оперирования понятиями и выводами принятыми в данной области исследований.

Сначала мы определяем и исследуем свойства томографических энтропий, с точки зрения нарушения шенноновских энтропийных неравенств для изолированных мультикудитных систем. В разделе вводится понятие взаимной томографической энтропии для произвольных состояний составных систем кудитов. В частности, подробно исследуются свойства совместной энтропии для двух кубит-

ной системы, как наиболее важной для физических приложений. Далее, мы исследуем вопрос о возможных связях между нарушениями неравенств БКХШ и томографических энтропийных функций.

Развивая идеи работ [92], [94], [95], определим классическую энтропию многоуровневых систем с дискретными наблюдаемыми. Определим классическую информационную энтропию H как функцию от вектора вероятности $\mathbf{w}$

$$H = -\mathbf{w} \ln \mathbf{w} = -w(+) \ln w(+) - w(-) \ln w(-). \quad (2.58)$$

Определение (2.58) энтропии было использовано еще Больцманом, но применительно к теории информации она была впервые введена Шенноном и носит его имя [12]. Обратим внимание, что определение (2.58) базируется на понятии вероятностных векторов, элементы которых принимают случайные значения.

Одна из интерпретаций формулы (2.58) в том, что чем больше мы стремимся выравнять вероятности различных событий некоторой средней вероятности $w(+) = w(-) = 1/2$, тем больше растет неопределенность исхода события, т.е. тем больше энтропия системы. Действительно, энтропия в равновероятной точке $(1/2, 1/2)$ равна $H = \ln 2$ и максимальна, как это легко заметить на рисунке 2.3. Таким образом, для всех допустимых распределений вероятностей должно выполняться неравенство $0 \leq H(\mathbf{w}) \leq \ln 2$.

Определение (2.58) легко обобщить на случай систем с n различными возможными исходами при осуществлении комплекса испытаний над системой. В этом случае можно говорить об n -мерном вероятностном пространстве из векторов вероятностей (2.1). Энтропию Шеннона тогда нужно определять на $(n - 1)$ -мерном симплексе состоящей из точек $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяющем условию $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$. Другими словами, симплекс будет состоять из точек совпадающих с концами векторов вероятностей (2.1). Информационная энтропия трита графически показана на рисунке 2.2.

Для n -мерный случая, очевидно, классическая томографическая энтропия

дискретной системы будет ограничена $0 \leq H(\mathbf{w}_n) \leq H(1/n, 1/n, \dots, 1/n) = \ln n$. Для количественного измерения “расстояния” одного распределения вероятностей от другого введем функцию

$$H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = y_1 \ln \frac{y_1}{x_1} + y_2 \ln \frac{y_2}{x_2} \geq 0. \quad (2.59)$$



Рисунок 2.2 – Классическая энтропия трита

Видно, что функция $H(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ неотрицательная, причем равенства нулю достигается только в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Функцию $H(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ называют относительной энтропией. Если существует совместное распределение вероятностей $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для случайных величин $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, можно определить совместную энтропию составной системы

$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ln \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. На рисунке 2.3 показаны совместная и относительная энтропии для двух кубитов в классической томографии.

Первый кубит описывается распределением вероятностей $\mathbf{x}$, а второй распределением $\mathbf{y}$.



Рисунок 2.3 – Совместная и условные энтропии для системы из двух кубитов в классической теории информации

Энтропия составной системы из двух подсистем 1 и 2 равна $H(12) = -\mathbf{w}(12) \ln \mathbf{w}(12)$. Энтропия же для каждой из подсистем в отдельности равны $H(1, 2) = -\mathbf{w}(1, 2) \ln \mathbf{w}(1, 2)$. В классической теории информации выполняются неравенства [80]:

$$H(1) \leq H(12), \quad H(2) \leq H(12). \quad (2.60)$$

Очевидно, совместная энтропия системы с учетом корреляций между ее подсистемами должна быть всегда меньше, чем сумма энтропий соответствующих подсистем

$$H(12) \leq H(1) + H(2). \quad (2.61)$$

С помощью распределений вероятностей (2.58) в виде неравенства (2.60)–(2.61) проверяются элементарно.

Неравенства (2.60) могут нарушаться в квантовой механике [48], [50].

Энтропия фон Неймана (2.42) является обобщением классической информационной энтропии в квантовой механике [66]

$$S = -Tr[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (2.62)$$

Энтропия фон Неймана переходит в энтропию Шеннона при диагональной матрице плотности. В самом деле, при $\rho = \rho_d$ и $\rho_{1,2} = w(\pm)$ энтропия фон Неймана равна (по сравнению с 2.58) $S = -w(+)\ln w(+)-w(-)\ln w(-) \equiv H$.

Пусть задано сепарабельное состояние (2.45). Возникает вопрос: можно ли по заданной матрице плотности системы найти матрицы плотности ее подсистем. Из вида разложения (2.45) ясно, что если усреднить его только по спиновым состояниям первой подсистемы, получится оператор плотности, описывающий только вторую систему и, наоборот,

$$\hat{\rho}^{(1)} = Tr_2 \hat{\rho}^{(12)} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k^{(1)}, \quad \hat{\rho}^{(2)} = Tr_1 \hat{\rho}^{(12)} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k^{(2)}. \quad (2.63)$$

Несмотря на то, что мы ввели операцию частичного следа на примере сепарабельного состояния, само определение (2.63) справедливо для любых состояний. Определение частичного взятия следа позволяет ввести совместную энтропию фон Неймана, а также определить энтропии фон Неймана отдельных подсистем. Энтропия составной системы и ее подсистем в квантовой механике даются формулами

$$S(12) = -\hat{\rho}^{(12)} \ln \hat{\rho}^{(12)}, \quad S(1) = -\hat{\rho}^{(1)} \ln \hat{\rho}^{(1)}, \quad S(2) = -\hat{\rho}^{(2)} \ln \hat{\rho}^{(2)}. \quad (2.64)$$

Пусть состояние, описывающее два кубита, имеет матрицу плотности 4×4 с элементами $\rho_{i_1 k_1, i_2 k_2}$, где индексы $i_1, k_1, i_2, k_2 = 1, 2$ матричных элементов $\rho_{i_1 k_1, i_2 k_2}$ нумеруют возможные состояния первого и второго кубитов, соответственно. Тогда матрицы плотности первого и второго кубита на основании (2.63) равны

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} \rho_{11,11} + \rho_{12,12} & \rho_{11,21} + \rho_{12,22} \\ \rho_{21,11} + \rho_{22,12} & \rho_{21,21} + \rho_{22,22} \end{pmatrix}, \quad \rho(2) = \begin{pmatrix} \rho_{11,11} + \rho_{12,12} & \rho_{11,21} + \rho_{12,22} \\ \rho_{21,11} + \rho_{22,12} & \rho_{21,21} + \rho_{22,22} \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Для максимально запутанного состояния Белла имеем $\rho(1) = \rho(2) = 1/2$. Поскольку состояние Белла чистое, энтропия общей системы равна $S(12) = 0$, а энтропии отдельных подсистем $S(1) = S(2) = \ln 2$. На этом примере видно, что классические неравенства (2.60) могут нарушаться в квантовой механике.

Энтропия фон Неймана состояния Вернера (2.52) равна

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}_W(12)) &= - \sum_{k=1}^4 \lambda_{\hat{\rho}_W}^k \ln \lambda_{\hat{\rho}_W}^k = \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{p}{4}\right) \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right) - p \ln\left(\frac{p}{2}\right) - \ln\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

На рисунке 2.4 изображена зависимость энтропии фон Неймана (2.66) и параметра p . Маргинальные матрицы плотностей вычисляются по формуле (2.63), (2.65) и дают $\rho_W(1) = \rho_W(2) = 1/2$. Энтропии подсистем, таким образом, не зависят от параметра p и равны $S_W(1) = S_W(2) = \ln 2$. Таким образом, классические энтропийные неравенства (2.60) могут быть нарушены в квантовой механике. Томографическая энтропия для систем с непрерывными наблюдаемыми определяется функционалом

$$T\{w(X, \mu, \nu)\} \equiv T(\mu, \nu) = - \int w(X, \mu, \nu) \ln w(X, \mu, \nu) dX. \quad (2.67)$$

Определение энтропии в томографическом представлении универсально поскольку охватывает классические и квантовые состояния. Для задания классической или квантовой энтропии достаточно в определении (2.67) подставить формулы (1.36)

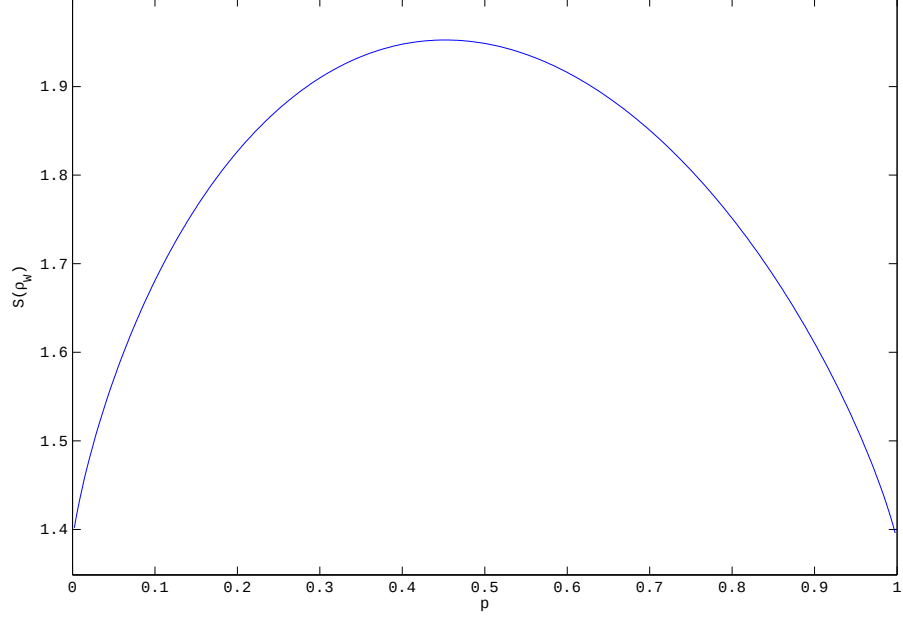


Рисунок 2.4 – Энтропия фон Неймана состояния Вернера между значениями $\ln 2$ и $2 \ln 2$

или (1.56). В случае дискретных квантовых систем следует воспользоваться выражениями (2.14), (2.21) или (2.27) для составной системы.

Определение энтропии (2.67) основано на симплектической томограмме. Поэтому ее можно также назвать симплектической энтропией. Пользуясь определением оптической томограммы (1.77), получим оптическую энтропию

$$T\{w_{opt}(X, \theta)\} = T_{opt}(\theta) = - \int w(X, \theta) \ln w(X, \theta) dX. \quad (2.68)$$

Исследуем вид энтропийных соотношений неопределенностей в рамках КВТ. Пусть известна волновая функция $\psi(x)$ системы. Тогда можем построить плотности распределения вероятностей координаты и импульса системы $|\psi(x)|^2$ и $|\tilde{\psi}(p)|^2$, соответственно, и вычислить по ним энтропию Шеннона по формуле

$$H = - \int |\psi(x)|^2 \ln |\psi(x)|^2 dx - \int |\tilde{\psi}(p)|^2 \ln |\tilde{\psi}(p)|^2 dp. \quad (2.69)$$

Энтропия (2.69) для основного состояния гармонического осциллятора (1.22) равна $H_0 = \ln \pi e$. Если у нас N осцилляторов, тогда волновая функция основного

состояния всей системы факторизуется и для энтропии всей системы получается $H_0 = \sum_{i=1}^N H_0^i = N \ln \pi e$.

Поскольку в основном состоянии неопределенность вероятности того или иного исхода эксперимента минимальна, ясно, что для всех остальных (возбужденных) состояний системы из N осцилляторов должно выполняться неравенство

$$H = - \int |\psi(\mathbf{x})|^2 \ln |\psi(\mathbf{x})|^2 d^n \mathbf{x} - \int |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2 \ln |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2 d^n \mathbf{p} \geq N \ln \pi e. \quad (2.70)$$

На языке томографической энтропии это означает, что функции $T_{opt}(\theta)$ должны удовлетворять неравенству:

$$T_{opt}(0) + T_{opt}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \ln \pi e, \quad (2.71)$$

т.к. функции $T_{opt}(\theta = 0)$ и $T_{opt}(\theta = \frac{\pi}{2})$ являются маргинальными распределениями. Определение оптической томограммы инвариантно относительно системы отсчета координат. Поэтому соотношение (2.71) должно быть справедливо также для произвольного угла

$$T_{opt}(\theta) + T_{opt}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \geq \ln \pi e. \quad (2.72)$$

Соотношение неопределенностей (2.72) указывает на корреляции между волновыми функциями в координатном и импульсном представлениях. Поскольку оптическая томограмма является экспериментально измеримой величиной, соотношения (2.71)-(2.72) могут быть точно проверены на опыте. Таким образом, мы еще раз убеждаемся в том, что томографическое представление квантовых состояний позволяет напрямую проверить границы самой квантовой механики.

Если СТ состояния представляет собой N -мерное Гауссовское распределение

$$w(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = ((2\pi)^N \det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}})^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad (2.73)$$

то томографическая энтропия согласно формуле (2.67) равна:

$$T_G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e)^N \det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}). \quad (2.74)$$

Условие положительности томографической энтропии и информации (2.61) приводят к следующему ограничению дисперсионную матрицу $\sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$

$$(2\pi e)^{-N} \leq \det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \leq \left(\prod_{i=1}^N \sigma_{X_i X_i} \right). \quad (2.75)$$

Для основного состояния гармонического осциллятора $\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \sigma_{XX} = (\mu^2 + \nu^2)/2$ и томографическая энтропия есть функция

$$T_0(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \ln \pi e (\mu^2 + \nu^2) \quad (2.76)$$

Для гауссовских томограмм соотношение неопределенностей (2.72) становится

$$\sigma_{XX}(\theta) \sigma_{XX} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \geq \frac{1}{4}, \quad (2.77)$$

где $\sigma_{XX}(\theta)$ — дисперсия наблюдаемой X как функция от угла поворота θ .

Перейдем теперь к обсуждению энтропии для кудитов и мультикудитных систем. В случае квантовой дискретной системы естественно определять томографическую энтропию формулой [94]

$$H(\mathbf{w}(\mathbf{n})) = -\mathbf{w}(\mathbf{n}) \ln \mathbf{w}(\mathbf{n}) = -\mathbf{w}(\varphi, \theta) \ln \mathbf{w}(\varphi, \theta), \quad (2.78)$$

где единичный вектор $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ указывает направления измерения проекции момента кудита, а $\mathbf{w}(\mathbf{n})$ — спиновая томограмма из (2.14).

Поскольку квантовая томографическая энтропия является правомерным обобщением энтропии Шеннона на квантовые состояния и является функцией от углов измерения, она может быть использована для подробного исследования областей нарушений неравенств вида (2.75)–(2.77).

Многие исследователи [47], [50] установили, что шенноновские энтропии подсистем удовлетворяют неравенствам, напоминающим известные неравенства БКХШ. Поэтому наряду с неравенствами БКХШ, энтропийные неравенства могут служить частичной мерой запутанности.

На рисунке 2.5 показана томографическая энтропия спина $1/2$, находящейся в состоянии $\hat{\rho}_u$ с проекцией $m = +1/2$. Верхняя граница энтропии равна $\ln 2$. На рисунке 2.6 показана томографическая энтропия смешанного состояния ρ_m .

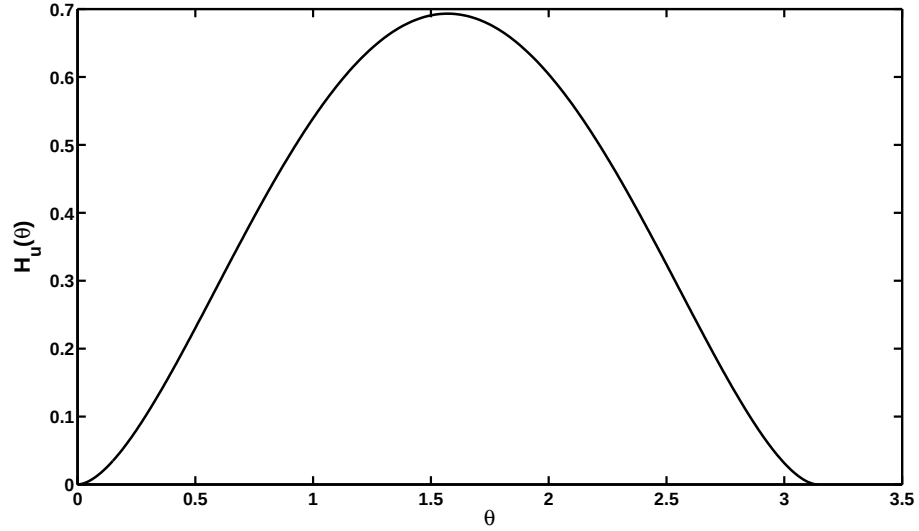


Рисунок 2.5 – Томографическая энтропия $H_u(\theta)$ спина $1/2$ как функция от θ

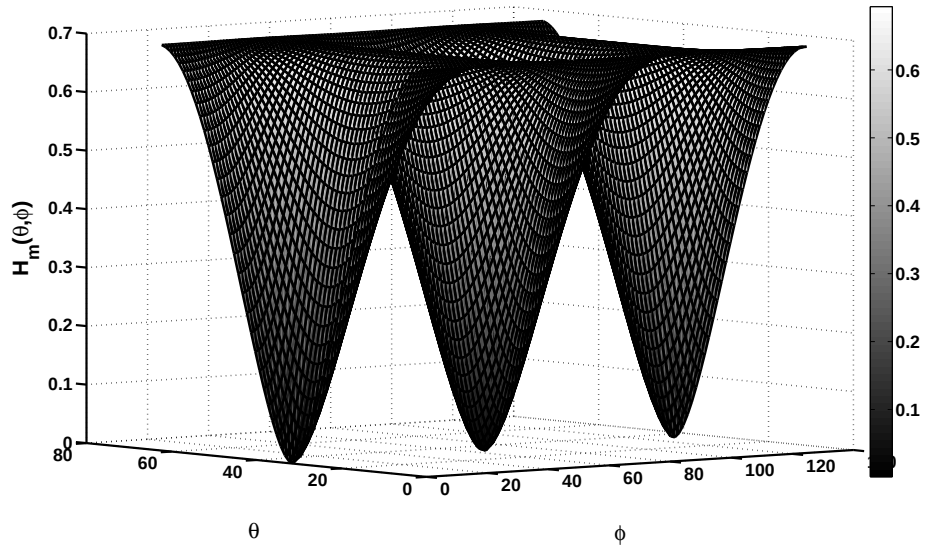


Рисунок 2.6 – Томографическая энтропия $H_m(\theta, \phi)$ смешанного состояния спина $1/2$

Сепарабельные состояния имеют классические аналоги, тогда как для запутанных состояний таких аналогов нет. В самом деле, для запутанных состояний

не существует универсального соотношения между энтропиями системы и энтропиями подсистем, поскольку $S(1), S(2) \geq S(1, 2)$.

Определим совместную томографическую энтропию двух кубитов [139]

$$\begin{aligned} H(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) &= -\frac{1}{2} \sum_{i,k}^4 w(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_k) \ln w(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_k) = - \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} (M_{2 \otimes 2}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) \ln M_{2 \otimes 2}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Здесь каждое направление измерения кубитов $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_k$ задается парой углов Эйлера $\mathbf{n}_i(\varphi_i, \theta_i), \mathbf{n}_k(\varphi_k, \theta_k)$. Стохастическая матрица $M_{2 \otimes 2}(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \hat{U}_4)$ строится из томографических векторов вероятностей [138]. Запись $\hat{U}_i$ короткая форма для операторов вращения $\hat{U}(\mathbf{n}_i)$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Томографическая энтропия двух кубитов является функцией восьми углов Эйлера. На рисунке 2.7 показана зависимость энтропии от одного из углов измерения первого кубита. Остальные углы зафиксированы (см. далее в разделе 2). На рисунке 2.7 показана томогра-

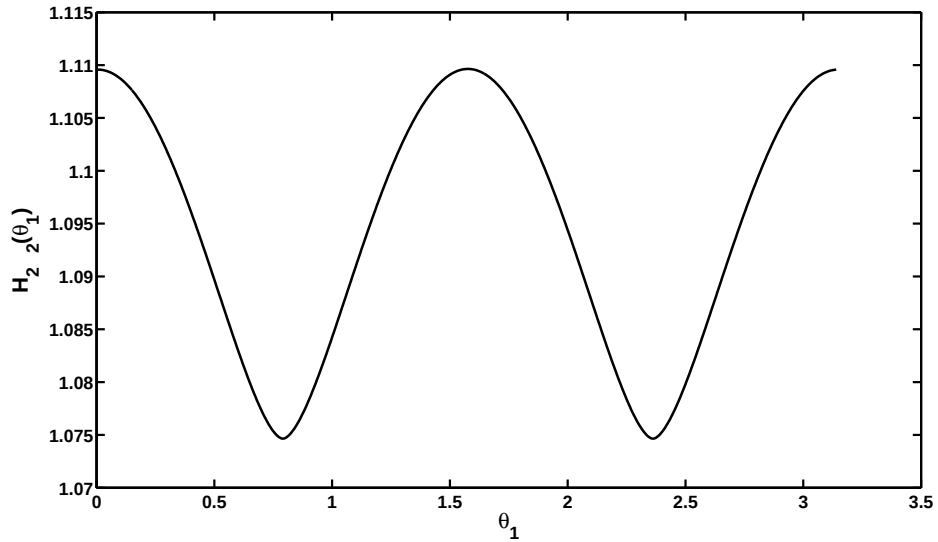


Рисунок 2.7 – Взаимная энтропия $H_{2 \otimes 2}(\theta_1)$ для двух кубитов как функция от направления измерений первого кубита θ_1

фическая энтропия максимально запутанного состояния (по признаку нарушения неравенств БКХШ) как функция от углов θ_2 и θ_4 . Остальные углы были зафиксированы и соответствуют верхней границы Цирельсона.

2.6. Основные выводы и результаты

Во второй главе на основе спиновой томограммы была построена томографическая модель многокудитных состояний. Было также показано как строится стохастическая матрица, задающая состояние многокудитной системы, и производится усреднение физических наблюдаемых на языке стохастических матриц. В рамках построенной модели в терминах томографических распределений и стохастических матриц составных систем дано определение сепарабельных и запутанных состояний. Получена замкнутая формула для определения важнейшей информационной характеристики составной многокудитной системы — томографической энтропии спиновых состояний. Были получены выражения неравенств для томографических энтропий и установлена их связь с СНШР для сжатых многомодовых состояний. Для системы из двух кубитов были проанализированы совместная и относительные томографические энтропии как меры запутанности состояний, а также вычислены верхние границы энтропийных неравенств. Полученные результаты опубликованы в работе [139] и докладывались на конференции [145].

Неравенства БКХШ в квантовой томографии

За последние три десятилетия экспериментальной физике удалось осуществить опыты, которые раньше считались лишь мыслимыми. В них ожидалось обнаружить эффекты сильно неклассического характера, которые соответствуют предсказаниям квантовой механики. В настоящее время известно много таких экспериментов с одиночными атомами, ионами и молекулами и даже с одиночными фотонами [96], [97], [98], [99].

Подобные физические эффекты, будучи обусловленными сугубо квантовыми явлениями, являются источниками нарушения различных неравенств, справедливых для классических оптических полей. Отметим, что нарушение классических неравенств тесно связано с сингулярностью и отрицательностью функции Глаубера-Сударшана [55].

Приведем наглядный пример такого рода оптических неравенств. Пусть имеются два излучения интенсивностью I_1 и I_2 . В классической оптике справедливо вытекающее из соотношения $\langle (I_1 - I_2)^2 \rangle \geq 0$ неравенство:

$$\langle I_1 I_2 \rangle \leq \frac{1}{2} (\langle I_1^2 \rangle + \langle I_2^2 \rangle). \quad (3.1)$$

Зау, Ванг и Мандель в 1991 году измерили корреляцию $\langle I_1 I_2 \rangle$ интенсивностей двух лучей путем счета числа случайных совпадений. Они зафиксировали нарушение классического неравенства (3.1) с очень высокой точностью – почти в 600 стандартных отклонений. Оба луча генерировались кристаллом $LiIO_3$.

В 1935 году А. Эйнштейн, П. Розен и Н. Подольский (ЭРП) опубликовали работу [100], в которой предлагали мыслимый эксперимент, приводящий к парадоксу и показывающий, по их мнению, неполноту квантовой механики (см. например [101]). Следуя Д. Бому проиллюстрируем парадокс ЭРП на примере измерений системы из двух спинов $1/2$ [102], [103], [104]. Рассмотрим пару частиц

со спином $1/2$ созданным в синглетном состоянии (2.48). Согласно квантовой механике, в совместном состоянии $|B\rangle_0$, если измерение проекции первого спина $\mathbf{S}_1\mathbf{a}$ на ось единичного вектора $\mathbf{a}$ покажет результат $+1$, то измерение проекции второго спина $\mathbf{S}_2\mathbf{a}$ обязательно покажет результат -1 и наоборот. Видно, что измерения проекций спинов двух пространственно разделенных частиц скоррелированы. По измерениям проекции спина одной частицы мы можем предсказать исход измерения проекции спина другой частицы. Однако исходная волновая функция $|B\rangle_0$ не содержала никакой информации о возможных исходах экспериментов над отдельными частицами системы. ЭРП сделали вывод о том, что описание синглетного состояния в квантовой механике не полное и нуждается в дополнительных параметрах. Такие параметры были названы скрытыми параметрами [101].

В 1964 году Дж. Белл опубликовал работу [42], в которой построил статистическую модель описания запутанного состояния двух спинов со скрытыми параметрами. Он показал, что в такой модели существуют ограничения на функции вида $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \hat{S}_{1a} \hat{S}_{2b} \rangle$. Здесь $\hat{S}_{1a} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_1 \mathbf{a}$ и $\hat{S}_{2b} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_2 \mathbf{b}$ — операторы проекций первого и второго спинов на оси, определяемые единичными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, соответственно. Эти ограничения Белл записал в виде неравенства [33], [42]

$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + C(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{c}$ — произвольный единичный вектор. Белл сравнил полученный результат (3.2) с предсказанием квантовой механики $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a}\mathbf{b} = -\cos \theta_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, где $\theta_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ — угол между направлениями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Для экспериментальной проверки неравенства (3.2) Д. Клаузер, М. Хорн, А. Шимони и Р. Хорн предложили тест [43], где ввели четвертое направление измерения $\mathbf{d}$ и записали неравенство Белла в более симметричной форме

$$|B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})| = |C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq 2. \quad (3.3)$$

Неравенство (3.3) принято называть неравенством Белла-Клаузера-Хорна-Шимо-

ни (БКХШ). Оно особо наглядно, так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ относятся к направлению измерения проекции первого спина, а $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ соответствуют направлениям измерения проекции второго спина. Неравенство БКХШ (3.3) показывает, что для системы из двух спинов функция $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, определенная на произвольных четырех направлениях $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, имеет верхнюю границу $B_{2 \otimes 2} = 2$. Для углов измерений $\theta_{ab} = 2\pi - \theta_{cb} = \theta_{cd} = \pi - \theta_{ad} = \pi/4$ имеем $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = C(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = -C(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \sqrt{2}/2$ и $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 4C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 2\sqrt{2} > 2$.

Итак, неравенства Белла и БКХШ должны выполняться в локальном реализме, однако при определенных условиях они могут быть нарушены в квантовой механике. Данное утверждение было доказано в математически строгой форме в работе [105].

Опишем схему типичных опытов по проверке неравенств БКХШ. На рисунке 3.1 изображен источник фотонов S , который испускает свет в форме пары фотонов в противоположные направления. Каждый из фотонов детектируется двухканальным поляризатором A или B в условии одной из возможных поляризаций фотонов, которые условно обозначаются как “+” и “-”. Исходящие от поляризаторов сигналы попадают в “счетчик случайных совпадений”, который фиксирует число одновременных возможных исходов $N_{++}, N_{+-}, N_{-+}, N_{--}$. На реальном опыте детекторы срабатывают спустя один и то же промежуток времени. Количество случайных совпадений $N_{ik}, i, k = \pm$ считается за существенно больший промежуток времени (в идеале он бесконечно большой), в течение которого источник S успевает испустить большое число фотонов. В качестве показателя “согласованности” пространственно разделенных детекторов естественно брать величину

$$C = \frac{N_{++} - N_{+-} - N_{-+} + N_{--}}{N_{++} + N_{+-} + N_{-+} + N_{--}}. \quad (3.4)$$

При экспериментальном расчете величины (3.4) поляризатор A вращается по направлениям единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$. Аналогичным образом, поляризатор B может находиться в двух положениях, задаваемых векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$. Получаются

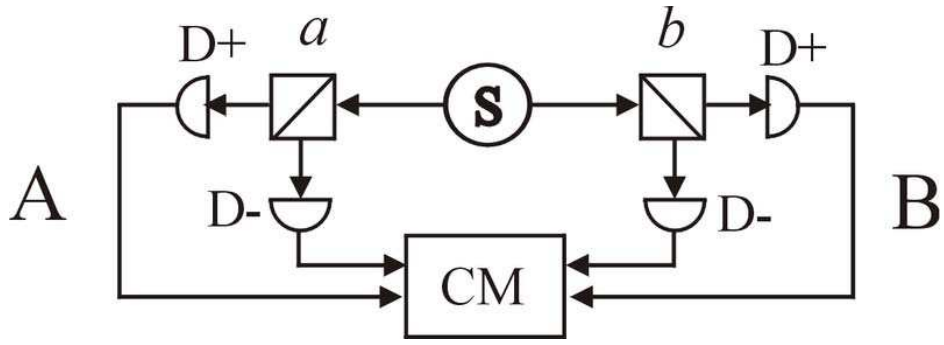


Рисунок 3.1 – Принципиальная схема оптического теста БКХШ

четыре значения для (3.4): $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $C(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $C(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $C(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$. Локальный реализм и квантовая механика предсказывают, как видно выше, существенно разные значения для величины (3.3). Поэтому схема опытов предложенная БКХШ может быть использована (после устранения экспериментальных ошибок) для проверки какая из теорий лучше подходит для описания природы.

Опыты по проверке неравенств Белла начались в ранние 1970гг. с эксперимента Фридмана и Клаузера [106]. В большинстве тестов использовался поляризованный свет сгенерированный каскадными переходами атомов кальция $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Заметим, что во всех опытах по проверке неравенств Белла или БКХШ существуют экспериментальные ошибки, связанные с эффективностью срабатывания детекторов (Garg & Mermin, 1987; Larsson 1998). С учетом этого приходится сделать поправку для неравенств БКХШ: они справедливы только если эффективность опытов не меньше $\eta = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 82\%$. Существуют тесты, для которых порог чувствительности опытов не так велик и составляет $\eta = 2/3 \approx 67\%$. Среди существующих тестов самая высокая эффективность (100%) была достигнута Роу и др. (Rowe, 2001), использовавших ионы вместо фотонов. Однако, к сожалению, эти опыты имеют существенные недостатки “локальной реальности”.

Для проверки нарушения локальной реальности квантовой механикой необходимо расположить детекторы A и B и источник частиц S так, чтобы между ними отсутствовала какая бы то ни было коммуникация. На опыте это достига-

ется пространственным разделением экспериментальных установок, показатели которых дают вклад в неравенство Белла. Таким образом, можно добиться того, чтобы время измерения было меньше чем время, которое потребовалось бы для отправки светового сигнала между экспериментальными установками.

Первые опыты по проверке нарушений неравенств Белла и БКХШ, направленные на устранения недостатков локальной реальности, были поставлены А. Аспе в 1981-1982 гг. [11]. Опыты подтвердили нарушения неравенств Белла, доказав полноту квантовой механики. Лучшая попытка в этом была достигнута Вейхсом [107], который усовершенствовал опыты Аспе. Заметим, что существуют также новые тесты неравенств БКХШ в области физики высоких энергий [108].

Оптические тесты неравенств БКХШ с более чем двумя частицами были предложены Д. Гринбергером, М.А. Хорном и А.Цайлингером (ГХЦ) в 1989г. [45], [46]. В этих работах было получено неравенство ГХЦ схоже с неравенством БКХШ (3.3). Опыты с тремя и четырьмя частицами (фотоны и электроны) были поставлены в 1990-1998гг. в которых было экспериментально установлено нарушение многокудитных неравенств ГХЦ. Эффективность детекторов в реальных опытах по проверке неравенства ГХЦ должна быть не менее 90.8%. Таким образом, современные задачи квантовой оптики и КВТИ, в частности квантовой криптографии сталкиваются с необходимостью рассмотрения многочастичных неравенств БКХШ [109], [110], [111], [112], [113], [114].

Составным квантовые системам присущи сильные квантовые корреляции, которые проявляются в экспериментально наблюдаемом эффекте нарушения неравенств Белла [42] и их обобщений [111]. В работах [84], [115] была выявлена связь неравенств БКХШ со свойствами дискретных томографических распределений.

При классификации квантовых состояний, выяснилось [116], что сепарабельные стохастические матрицы удовлетворяют известным неравенствам БКХШ.

В серии работ [37], [117], [118] было установлено, что неравенства БКХШ связаны с вероятными характеристиками томографических распределений веро-

ятности спиновых состояний. Это означало, что нарушение неравенств БКХШ новых неравенств [119], [120], [121] могут быть изучены в рамках КВТ.

В этих работах была указана на возможность описания многочастичных квантовых состояний определенными стохастическими матрицами [83], известными из теории цепей Маркова и стохастических процессов [13]. В работах [137], [138] эти исследования приобрели окончательный вид и был построен математический аппарат для расчета всевозможных неравенств БКХШ как в классических стохастических схемах со скрытыми переменными, так и в КВТ.

В параграфе 3.1 выводятся обобщенные неравенства БКХШ для системы из N кудитов со спинами $j_1, j_2, \dots, j_N$. Приводятся аналитический и численный методы расчета верхних границ неравенств БКХШ, служащих частичной мерой запутанности мультикудитных состояний. В простейшем случае системы из двух кубитов приведен аналитический расчет верхних границ неравенств БКХШ и соответствующие стохастические матрицы. Приводится расчет функции корреляций $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ состояний Вернера, по которой можно провести классификацию сепарабельных и запутанных состояний без критерия ПГ. В параграфах 3.2, 3.3, 3.4 разрабатывается томографическая модель расчета функции $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, которая применяется к исследованию запутанных состояний систем кубит-кутрит, кутрит-кутрит и кубит-кубит-кубит. Для каждой из систем приведены результаты численного моделирования в пакете MATLAB. В параграфе 3.5 проверяется предположение о существовании связи томографических энтропий с функциями БКХШ. В частности, исследуется возможность совместимости этих двух частичных мер запутанности многокудитных состояний.

3.1. Томографический вывод неравенств БКХШ

Наша задача найти явную форму матрицы $C(\hat{A}, \hat{B})$ для мультикудитных состояний в томографическом представлении. Пусть у нас имеется кудит с момен-

том j и с проекцией момента на ось квантования m . Пусть, далее C наблюдаемая величина зависящая от локального наблюдаемого, которая в данном случае есть проекция m . Тогда оператор $\hat{C}$ можно представить в виде $(2j + 1) \times (2j + 1)$ матрицы в базисе спиновых состояний (2.10). В спиновой томографии, среднее наблюдаемой C можно записать в виде суммы

$$\langle C \rangle = \sum_{m, m'=-j}^j c_{mm'} w_{mm'} = \sum_{m, m'} \langle m' | C^\dagger | m \rangle \langle m | M_w^{(j)} | m' \rangle = Tr \left(C^\dagger M^{(j)} \right) = \langle C | M^{(j)} \rangle. \quad (3.5)$$

Здесь $w_{mm'}$ обозначает спиновую томограмму кудита (2.13) с проекцией момента m при m' измерении детектором по направлению детектора $\mathbf{n}_{m'}$. Матрица $M^{(j)}$ представляет собой стохастическую матрицу кудита (2.30) $M^{(j)}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{2j+1})$ содержащей $2j + 1$ направлений. Измерение каждой из наблюдаемых m, m' может приводить к $(2j + 1) \times (2j' + 1)$ исходам, где $j = m_{max}$, $j' = m'_{max}$. Существенным преимуществом записи квантомеханического среднего наблюдаемой C в виде (3.5) в том, что в ней осуществляется усреднение как по спиновым так и по направлению измерений кудита. Таким образом, средние в виде (3.5) являются теоретическим выражением для экспериментально измеряемой корреляции (3.3).

Перейдем теперь к расчету квантовых корреляций для мультикудитных состояний. Кванто-механическое среднее наблюдаемой C описывающей корреляции между ожидаемыми значениями локальных наблюдаемых m_1 и m_2 дается формулой

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &= \sum_{m'_1, m'_2=-j}^j \langle m'_1 m'_2 | C^\dagger \left(\sum_{m_1, m_2=-j}^j |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \right) M^{(j_1 j_2)} | m'_1 m'_2 \rangle = \\ &= Tr \left(C^\dagger M^{(j_1 j_2)} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь предполагается, что измерения каждой из локальных наблюдаемых m, m' может приводить к $(2j + 1) \times (2j' + 1)$ исходам, где $j = m_{max}$, $j' = m'_{max}$. Матрица $M^{(j_1 j_2)}$ составлена из вероятностей $w_{m_1 m_2, m'_1 m'_2}$ всевозможных состояний составной

системы и определяется по общей формуле (2.28).

Пусть задана совместное распределение вероятностей N -кудитной системы (2.28). Мы можем определить корреляции между произвольными локальными наблюдаемыми $m_1, m_2, \dots, m_d$ как функцию

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{2j_1+1}, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_{2j_2+1}, \dots, \mathbf{n}_N, \mathbf{n}_{2j_N+1}) &= \\
&= \langle m_1 m_2 \dots m_d \rangle_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N} = \\
&= \sum_{m_1 m_2 \dots m_d} w(m_1, m_2, \dots, m_N, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_d) m_1 m_2 \dots m_N = \\
&= Tr \left(I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}^\dagger M^{(j_1 j_2, \dots, j_N)} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где векторы $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N$ отвечают за возможные направления вдоль которых могут срабатывать детекторы. Матрица $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ позволяет обобщить неравенства БКХШ (3.3) и содержит знаки спиновых корреляций. Конкретный вид матрицы $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ устанавливается для каждой мультикудитной системы отдельно. Общая схема построения матриц $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ была найдена в работе [137] и будет дана ниже.

Суммирование в средних типа (3.7) производится с помощью удвоенных спиновых проекций $m_i \rightarrow 2m_i$. Среднее (3.7) является обобщением моделей экспериментальных измерений квантовых корреляций (3.4). Поэтому для определения матрицы $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ для мультикудитных состояний необходимо рассмотреть знаки, которыми в сумму (3.7) входят томограммы.

Из формулы (3.7) видно, что в вероятностном представлении общая формула усреднения по состояниям одна и та же как в классическом так и в квантовом случаях. Ясно поэтому, что соответствующая классическая формула для корреляций может быть записана в виде общей билинейной формы

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}) = Tr C^\dagger M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}}, \tag{3.8}$$

где $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}}$ стохастическая матрица из (2.3) описывающая N -кудитное состояние с $d_1 + d_2 + \dots + d_N$ измерениями.

Сопоставления экспериментально измеряемую корреляцию (3.7) с теоретическим выводом (3.6) находим, что источником неравенств Белла для двух кубитов может служить функция (3.8). Следуя [137], [138], будем называть $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z})$ функцией корреляций БКХШ. Если у функций типа (3.8) существуют локальные максимумы, то естественно их называть числами Белла. Тогда, глобальный максимум таких форм будет совпадать с верхней границей неравенств Белла или БКХШ для заданной функции $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z})$.

Из формулы (3.8) и определения стохастических матриц (2.3), (2.31) состояния видно, что в классической томографии, обобщающей локальные стохастические модели со скрытыми параметрами, все функции типа (3.8) являются гармоническими функциями от своих аргументов [21], [137] как для факторизуемых так и для не факторизуемых стохастических матриц составной системы. С формальной точки зрения, именно так возникают неравенства Белла и БКХШ в классической томографии систем с дискретными наблюдаемыми.

Таким образом, задача отыскания неравенств БКХШ сводится к исследованию верхних границ функции вида (3.8) в классической томографии. Для обнаружения же нелокальный квантовых корреляций необходимо изучить ту же форму но уже в рамках квантовых томограмм.

Применим разработанный метод к системе из двух кубитов для которой $N = 2$, $j_1 = j_2 = 1/2$, $d_1 = d_2 = 2$. Найдем сначала верхние границы функции (3.8) в классической томографии. Стохастическая матрица (2.29) для этого случая представляет собой матрицу 4×4 . Представим ее в факторизуемом виде $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}}$.

Для системы из двух кубитов знаки входящие в спиновую корреляцию (3.8)

можно наглядно изобразить диаграммой

$$\sigma_{2\otimes 2} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ + & + & + & + \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Мы видим, что специальная матрица $I_{2\otimes 2}$ получается транспонированием диаграммы $\sigma_{2\otimes 2}$ и изменением знака последней строки (3.9)

$$I_{2\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Для расчета квантовых корреляций (3.8) необходимо рассмотреть два вектора вероятностей $\mathbf{w}(x_i) = (x_i, 1 - x_i)^T$ для первого, и два вектора вероятностей $\mathbf{w}(y_j) = (y_j, 1 - y_j)^T$ для второго кубита, где $0 \leq x_i, y_j \leq 1$, $i, j = 1, 2$. По формуле (3.8) получаем функцию БКХШ в виде

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= Tr(M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} C) = \\ &= \mathbf{C}_1(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_2) + \mathbf{C}_3(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_4(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2) = \\ &= x_1(c_{11}y_1 + c_{12}(1 - y_1) + c_{21}y_2 + c_{22}(1 - y_2)) + \\ &+ (1 - x_1)(c_{13}y_1 + c_{14}(1 - y_1) + c_{23}y_2 + c_{24}(1 - y_2)) + \\ &+ x_2(c_{31}y_1 + c_{32}(1 - y_1) + c_{41}y_2 + c_{42}(1 - y_2)) + \\ &+ (1 - x_2)(c_{11}y_1 + c_{12}(1 - y_1) + c_{21}y_2 + c_{22}(1 - y_2)), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\mathbf{C}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ столбцы матрицы C которые определены как векторные функции от случайных величин m_1 и m_2 .

Как билинейная функция $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является гармонической функцией от своих аргументов $q_i = x_1, x_2, y_1, y_2$. Но тогда функция $B(\mathbf{q})$ достигает свои верхние

пределы только на границах $G_{0000}(q_i = 0), \dots, G_{ijkl}, \dots, G_{1111}(q_i = 1)$. Число возможных верхних границ $2^4 = 16$. Все границы $\{i, j, k, l\}$ совпадают с вершинами едиичного четырехмерного куба, причем каждый из четырех индексов i, j, k, l может принимать либо 0 или 1. Таким образом, для любой корреляционной матрицы C , из формулы (3.11) получаем всевозможные числа Белла

$$\left\{ \begin{array}{ll} B(G_{0000}) = c_{14} + c_{12} + c_{24} + c_{22}, & B(G_{1111}) = c_{31} + c_{41} + c_{11} + c_{21}, \\ B(G_{0001}) = c_{14} + c_{12} + c_{23} + c_{21}, & B(G_{0010}) = c_{11} + c_{13} + c_{24} + c_{22}, \\ B(G_{0100}) = c_{14} + c_{32} + c_{42} + c_{24}, & B(G_{1000}) = 2(c_{12} + c_{22}), \\ B(G_{1100}) = c_{12} + c_{22} + c_{42} + c_{32}, & B(G_{1110}) = c_{11} + c_{22} + c_{31} + c_{42}, \\ B(G_{0011}) = c_{13} + c_{23} + c_{11} + c_{21}, & B(G_{1011}) = 2(c_{11} + c_{21}), \\ B(G_{0111}) = c_{13} + c_{23} + c_{31} + c_{41}, & B(G_{1010}) = 2(c_{11} + c_{22}), \\ B(G_{0101}) = c_{14} + c_{23} + c_{32} + c_{42}, & B(G_{1001}) = 2(c_{12} + c_{21}), \\ B(G_{1101}) = c_{12} + c_{21} + c_{32} + c_{41}, & B(G_{0110}) = c_{13} + c_{24} + c_{31} + c_{42}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

В работе [138] исследовались ограничения которые можно наложить на C основываясь на общих свойствах билинейных форм. Оказывается, что в случае двух кубитов матрица C должна быть пропорциональна $I_{2 \otimes 2}$. Поэтому, выбрав в качестве матрицы C специальную матрицу $I_{2 \otimes 2}$ получаем

$$B_{2 \otimes 2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2 + 4x_1y_1 + 4x_1y_2 - 4x_1 - 4y_1 - 4x_2y_2 + 4x_2y_1. \quad (3.13)$$

Расчет всех 16 чисел Белла для специальной матрицы $I_{2 \otimes 2}$ приведен в таблице 3.1. Максимальное значение, как видно из таблицы, равно $B = 2$. Таким образом, в рамках классической томографии систем с дискретными наблюдаемыми, известный результат Цирельсона [105] о верхней границе неравенств БКХШ двух кубитной системы, является естественным следствием вероятностного описания состояний составных систем. Рассмотрим теперь функцию БКХШ двух кубитов в КВТ. Томограмма кубита была дается двумерным вектором вероятности (2.23). Стохастическая матрица системы из двух кубитов дается формулой (2.29). Согласно

x	y	B (x,y)	x	y	B (x,y)	x	y	B (x,y)	x	y	B (x,y)
00	00	2	01	00	2	10	00	-2	11	00	-2
00	01	2	01	01	-2	10	01	2	11	01	-2
00	10	-2	01	10	2	10	10	-2	11	10	2
00	11	-2	01	11	-2	10	11	2	11	11	2

Таблица 3.1 – Числа Белла для двух-кубитной системы при матрице $I_{2 \otimes 2}$

общей схеме квантования с помощью томографических распределений, мы фиксируем два унитарных матриц U_1 , U_2 для первого кубита и два унитарных матрицы V_1 , V_2 для второго кубита. Вычислив функцию (3.7) для максимально запутанного состояния (2.49), получаем

$$\begin{aligned}
B_{2 \otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4) = & \\
= 2 + 4 \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + & \\
+ 4 \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) - & \\
- \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_3) - \sin \theta_1 \sin \theta_4 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_4) - & \\
- \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_3) + \sin \theta_2 \sin \theta_4 \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_4) + & \\
+ \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_3) + \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_4) + & \\
+ \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_3) - \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_4). &
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

На рисунке 3.2 приведен график функции $B_{2 \otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ как функции от углов θ_2 и θ_4 . Значения остальных углов отображены в таблице 3.2 и подобраны максимально близкими к тем, которые они принимают при максимальном нарушении неравенств БКХШ. В таблице возможные ориентации каждого из кубитов обозначены 1, 2 и 1', 2'.

На рисунке 3.2 область при $B > 2$ отвечает тем значениям углов Эйлера, при которых квантовые наблюдения нарушают классические неравенства Белла

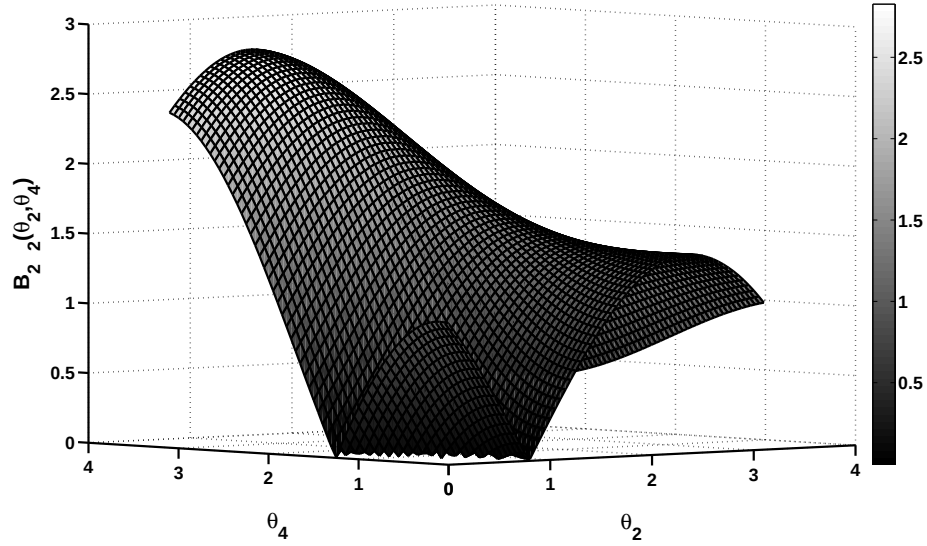


Рисунок 3.2 – Функция БКХШ двух кубитов $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ как функция от углов θ_2 и θ_4

и БКХШ. В данном случае верхний предел функции БКХШ совпадает с границей Цирельсона, как и должно быть.

В качестве иллюстрации к тому, каким образом можно исследовать сепарабельность системы по значениям функции БКХШ, обратимся к значениям функции в таблице 3.2.

Углы	Направления измерения				Направления измерения			
	1	2	1'	2'	1	2	1'	2'
φ	0	$\pi/3$	π	0	$\pi/4$	$\pi/4$	0	$\pi/4$
θ	$\pi/2$	0	0	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$
Числа Белла	$B = 1$				$B \approx 1.83$			

Таблица 3.2 – Проверка неравенства БКХШ для системы кубит-кубит.

Численный расчет позволяет восстановить стохастические матрицы, соответствующие значениям функции БКХШ. Значению $B = 1$ соответствует стохастическая

ческая матрица

$$M_{B=1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 + 1/8\sqrt{2} & 1/2 & 1/4 + 1/8\sqrt{2} \\ 1/4 & 1/4 - 1/8\sqrt{2} & 0 & 1/4 - 1/8\sqrt{2} \\ 1/4 & 1/4 - 1/8\sqrt{2} & 0 & 1/4 - 1/8\sqrt{2} \\ 1/4 & 1/4 + 1/8\sqrt{2} & 1/2 & 1/4 + 1/8\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Мы можем изменением параметром измерений, в данном случае углов наблюдения за кубитами, добиться непрерывного восстановления квантового состояния - стохастической матрицы. Например, при всех значений $B < 2$ получаем сепарабельные состояния, свойства которых очень близки свойствам классических динамических систем с непрерывными случайными наблюдаемыми. Увеличим значения B до $B \approx 1.83$. Соответствующая стохастическая матрица

$$M_{B \approx 1.83} = \begin{pmatrix} 5/16 + 1/16\sqrt{6} & 1/4 + 1/16\sqrt{6} & 3/8 + 1/16\sqrt{2} & 3/8 \\ 3/16 - 1/16\sqrt{6} & 1/4 - 1/16\sqrt{6} & 1/8 - 1/16\sqrt{2} & 1/8 \\ 3/16 - 1/16\sqrt{6} & 1/4 - 1/16\sqrt{6} & 1/8 - 1/16\sqrt{2} & 1/8 \\ 5/16 + 1/16\sqrt{6} & 1/4 + 1/16\sqrt{6} & 3/8 + 1/16\sqrt{2} & 3/8 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Эти состояния являются сепарабельными, поэтому удовлетворяют неравенствам БКХШ [84]. Таким образом, построенная нами томографическая модель кубита содержит нелокальные квантовые корреляции, приводящие к нарушению неравенств Белла и БКХШ.

Беря значения углов Эйлера из таблицы 3.3 можно восстановить соответствующие им стохастические матрицы, т.е. квантовые нелокальные состояния наруша-

Углы измерения	Измерения				Измерения			
	1	2	1'	2'	1	2	1'	2'
φ	6.2800	6.2800	6.2800	0.0416	6.2639	1.8010	0.0190	0.0200
θ	1.5834	2.3705	2.3705	0.7962	1.5834	3.1410	2.3620	0.7910
Числа Белла	$B = 2.4148$				$B = 2.8284$			

Таблица 3.3 – Нарушение неравенств БКХШ для двух кубитов вблизи границы Цирельсона.

ющие неравенства БКХШ

$$\begin{aligned}
 M_{B=2.4148} &= \begin{pmatrix} 0.4264 & 0.4263 & 0.4999 & 0.2490 \\ 0.0735 & 0.0736 & 0 & 0.2509 \\ 0.0735 & 0.0736 & 0 & 0.2509 \\ 0.4264 & 0.4263 & 0.4999 & 0.2490 \end{pmatrix}, \\
 M_{B=2.8284} &= \begin{pmatrix} 0.4280 & 0.4255 & 0.4278 & 0.0742 \\ 0.0720 & 0.0745 & 0.0722 & 0.4258 \\ 0.0720 & 0.0745 & 0.0722 & 0.4258 \\ 0.4280 & 0.4255 & 0.4278 & 0.0742 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Второй столбец таблицы 3.3 выбранных направлений воспроизводит известную границы Цирельсона [105]. Значение этого верхнего предела симметричное, как это следует из полученного выражения для функции БКХШ (3.14). Путем численного расчета легко найти так же нижнюю границу $B = -2\sqrt{2}$ [138].

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= 1.9244 & \theta_3 &= 1.9244 & \varphi_1 &= 1.7351 & \varphi_3 &= 1.7351 \\
 \theta_2 &= 0.5657 & \theta_4 &= 0.5657 & \varphi_2 &= 0.7780 & \varphi_4 &= 0.7780
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

На рисунке 3.3 приведен график формы БКХШ как функции от угла θ_1 . Рисунок графически обобщает теорему Цирельсона [105] на все состояния системы из двух кубитов.

Чтобы убедиться в том, что функция (3.14) действительно описывает нарушение неравенств Белла именно около предела Цирельсона, необходимо много-

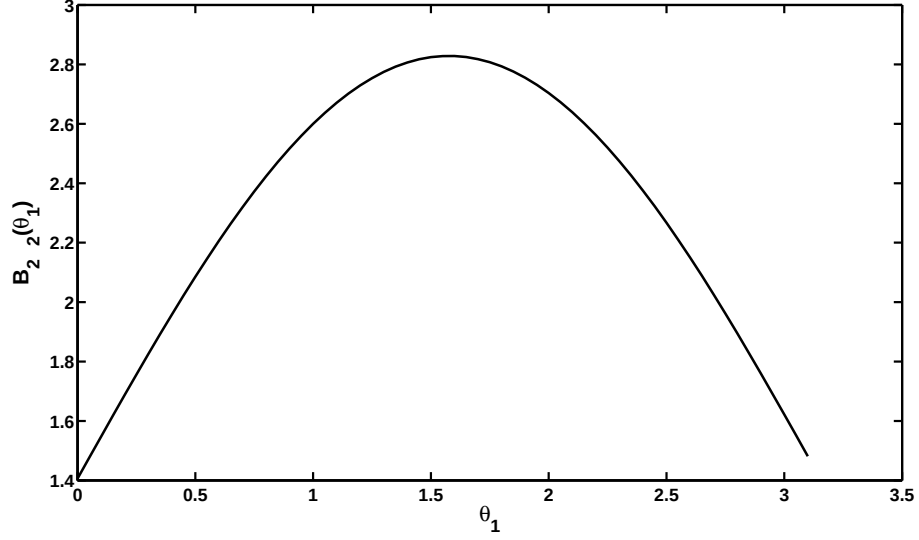


Рисунок 3.3 – Билинейная форма $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ в окрестности границы Цирельсона как функция от угла θ_1 первого кубита.

кратно зафиксировать численные значения билинейной формы, соответствующие глобальным максимумам для всех значений углов Эйлера. Это было реализовано программно в работе [138]. Результаты численного моделирования подтвердили правильность аналитического выражения (3.14). В качестве иллюстрации на рисунках 3.4, 3.5, 3.6 приведены графики функции БКХШ от различных углов первого и второго кубитов из этой работы.

Можно записать квантовую функцию БКХШ в самом общем виде для произвольной матрицы C . Это было сделано в работе [138]. Полученное выражение является линейной функцией от матрицы $C_{2\otimes 2}$. Было показано, что нарушение неравенств БКХШ можно обнаружить при любой $C_{2\otimes 2}$, имитирующей локальную теорию со скрытыми параметрами. Роль параметров в данном случае играют элементы матрицы $C_{2\otimes 2}$, позволяющие осуществить усреднение по классическому ансамблю набору состояний, соответствующему всевозможным вероятностям мультикудитной системы.

Таким образом, в работах [137], [138], [144] была установлена невозможность построения классической стохастической модели для мультикудитных состояний,

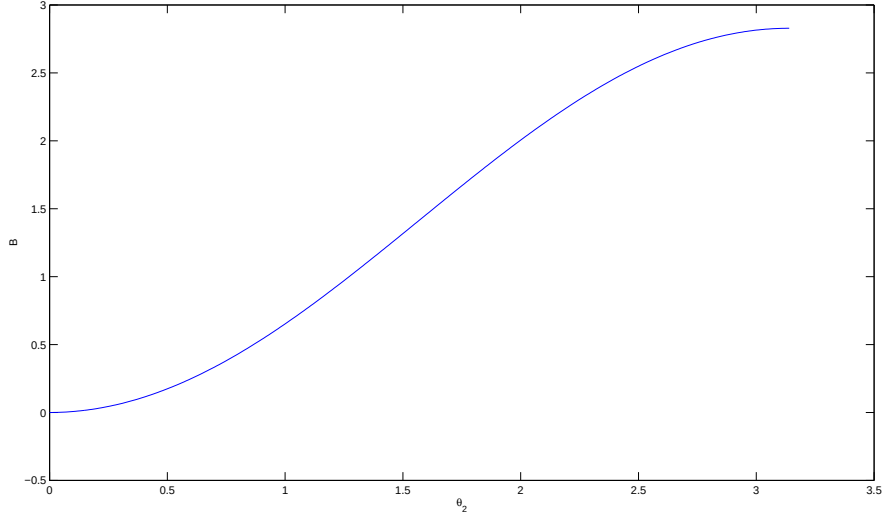


Рисунок 3.4 – Билинейная форма $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ в окрестности границы Цирельсона как функция от угла θ_2 первого кубита.

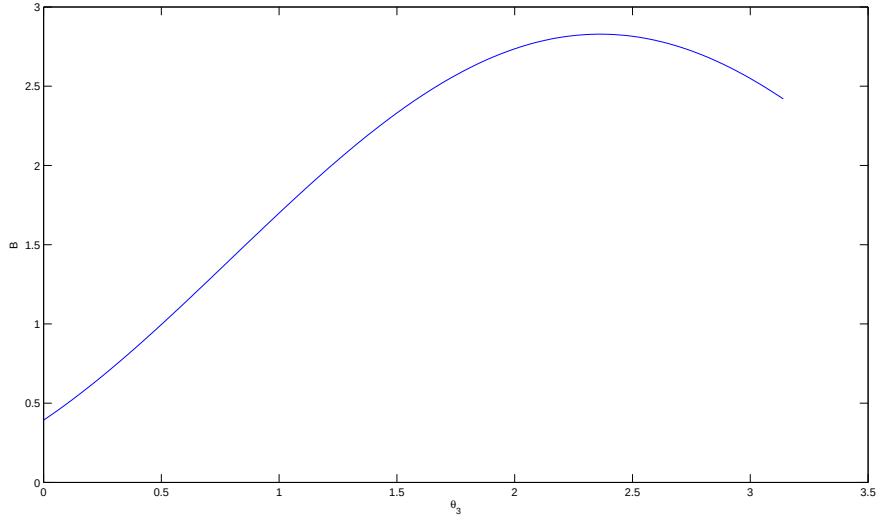


Рисунок 3.5 – Билинейная форма $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ в окрестности границы Цирельсона как функция от угла θ_3 второго кубита.

которая смогла бы воспроизводить все непрерывные значения функции БКХШ, рассчитанной в квантовой спиновой томографии.

Если составная система сепарабельная, она не содержит нелокальные квантовые корреляции, а верхние границы функции БКХШ как в классической так и в квантовых механиках ограничены одним и тем же верхним пределом. При выборе

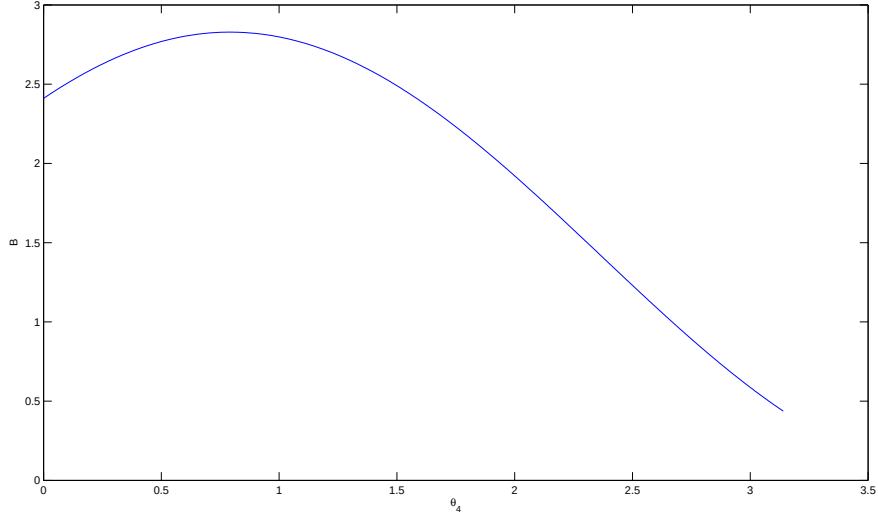


Рисунок 3.6 – Билинейная форма $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ в окрестности границы Цирельсона как функция от угла θ_4 второго кубита.

соответствующих параметров сами значения функций могут совпадать для целых значений изменения классических параметров вероятностей и углов Эйлера. Для этих областей можно установить соответствие между классическими и квантовыми состояниями. Например, если C положить равной $\sigma_{2\otimes 2}$, то функцию БКХШ можно вообще обнулить $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \text{Tr} \sigma_{2\otimes 2} M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}} = 0$. Однако, если система запутанная, то совместные функции распределения, входящие в стохастическую матрицу $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}}$ не факторизуются. За счет присутствия нелокальных квантовых корреляций в общем случае верхние границы неравенств БКХШ в классической и в квантовых статистиках заметно отличаются.

Безусловно одно из преимуществ изложенного метода заключается в том, что при подходящем выборе матрицы C мы можем исследовать любые локальные теории со скрытыми переменными. Например, мы можем непосредственно обобщить полученные нами результаты для максимально запутанного состояния (2.49) в

случае известных состояний Вернера (2.52) для двух кубитов [90], для которых

$$\begin{aligned}
B_{2 \otimes 2}^W(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4, p) = \\
= 2p - 4p \cos^2(\theta_1/2) - 4p \cos^2(\theta_3/2) + 4p \cos^2(\theta_1/2) \cos^2(\theta_3/2) + \\
+ 4p \cos^2(\theta_1/2) \cos^2(\theta_4/2) + 4p \cos^2(\theta_2/2) \cos^2(\theta_3/2) - 4p \cos^2(\theta_2/2) \cos^2(\theta_4/2) + \\
+ p \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_3) + p \sin(\theta_1) \sin(\theta_4) \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_4) + \\
+ p \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_3) - p \sin(\theta_2) \sin(\theta_4) \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_4) - \\
- p \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_3) - p \sin(\theta_1) \sin(\theta_4) \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_4) + \\
+ p \sin(\theta_2) \sin(\theta_4) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_4) - p \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_3).
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

На рисунке 3.7 показана зависимость верхних границ неравенства БКХШ для двух кубитов от параметра p запутанности системы. Из рисунка видно, что верхние границы растут линейно на интервале запутанности $1/3 < p < 1$, достигая максимума $B = 2\sqrt{2}$ при $p = 1$.

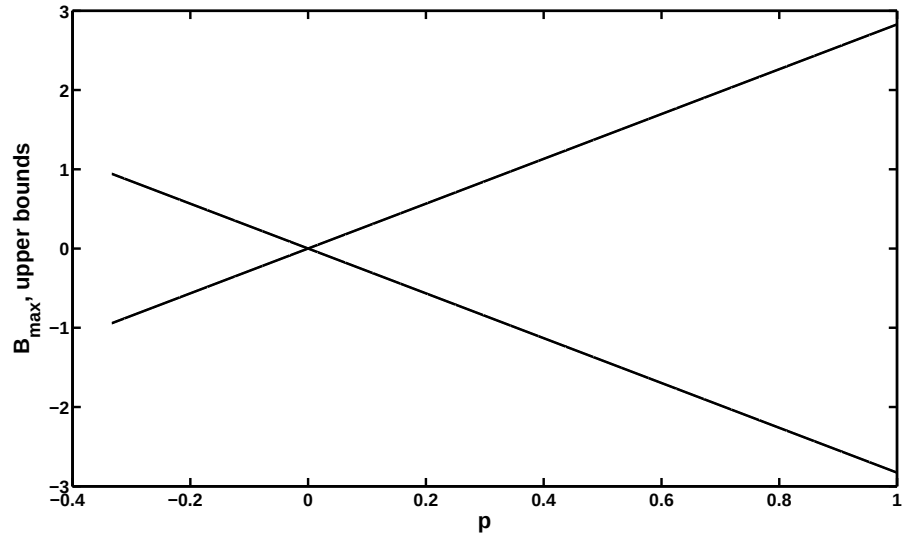


Рисунок 3.7 – Верхние границы состояний Вернера как функции от параметра запутанности p .

Система двух кубитов, подробно изученная в данном параграфе, содержит все основные аспекты применения томографических методов исследования неравенств БКХШ. В следующих параграфах мы применим полученный метод расчета верхних границ неравенств БКХШ и квантовых корреляций к некоторым интересным многокубитным системам высших размерностей $N > 2$, $d_i > 2$.

Мы получили правило составления функции БКХШ для заданной матрицы спиновых корреляций $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ или общей корреляционной матрицы $C_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$.

Информация о квантовых корреляциях между дискретными наблюдаемыми содержится в стохастической матрице (2.31) $M^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}(\mathbf{n}_{j_1} \dots, \mathbf{n}_{-j_N})$ составной системы. При этом данная матрица может быть просто факторизуемой, сепарабельной или несепарабельной. По классической стохастической матрице $M_{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \dots \otimes \mathbf{z}}$ состояния необходимо рассчитать все числа Белла (3.8) и установить верхнюю границу для неравенств БКХШ в классической томографии состояния. Аналогично рассчитываются верхние границы неравенства БКХШ в квантовой томографии по матрице $M^{(j_1, j_2, \dots, j_N)}(\mathbf{n}_{j_1} \dots, \mathbf{n}_{-j_N})$. Расхождение между этими верхними пределами указывает на наличие нелокальных квантовых корреляций, которые выходят за рамки локальных стохастических моделей со скрытыми параметрами.

Для составления многокубитной функции БКХШ необходимо снабдить знаками матрицы $I_{d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_N}$ элементы стохастической матрицы $M_{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \dots \otimes \mathbf{z}}$ и просуммировать по всем элементам

$$|B(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \dots \otimes \mathbf{z})| \leq \max \left\{ \left| \sum_{ik\{\sigma\}} M_{ik} \right| \right\}. \quad (3.20)$$

Данное правило позволяет детектировать возможные неравенства БКХШ, провести их классификацию по сепарабельным и запутанным состояниям.

3.2. Неравенства типа БКХШ в системе кубит-кутрит

Квантовые корреляции в системе кубит-кутрит с двумя выделенными направлениями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ задаются формулой (3.7), в которой необходимо положить $m_1 = \pm 1$, $m_2 = \pm 1, 0$ [122]. Для расчета всех чисел Белла необходимо рассмотреть $2^8 = 256$ стохастических матриц, отвечающих пяти измерениям – два для кубита и три для кутрита. Исключаем число нефизических вершин с вероятностями x_i, y_j, z_k, t_l ($i, j, k, l = 1, 2$) запрещенными требованием положительности стохастических матриц, $1 - y_1 - y_2 \geq 0, 1 - z_1 - z_2 \geq 0, 1 - t_1 - t_2 \geq 0$. Число физических вершин сокращается до $2^2 \times 3^3 = 108$.

Стохастическая матрица системы бит-трита есть $M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}}$, где матрицы бита и трита берутся из формул (2.8), (2.5). Специальная матрица спиновых корреляций есть

$$I_{2 \otimes 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Для системы кубит-кутрит функция БКХШ равна

$$B_{2 \otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = 4 + 4x_1z_1 - 2x_2t_2 + 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2z_1 + 4x_2y_1 + 2x_2z_2 + 2x_1z_2 + 2x_1t_2 + 4x_1t_1 - 6x_1 - 2x_2 - 4y_1 - 4z_1 - 2y_2 - 2z_2 + 2x_2y_2 - 4x_2t_1. \quad (3.22)$$

Для вычисления верхних границ функции (3.22) проще всего воспользоваться численным счетом. Укажем в качестве иллюстраций некоторые числа Белла $B = -6, 0, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 0, -4, 0, 2, 6, 8, 12, 6, 0, 2, 2, 4, 4, 6, 0, 2, 0, 0, 6$. Числа ± 6 , ± 8 and

± 12 относятся к нефизическим вершинам и должны быть отброшены. Таким образом, $B_{max}^{classical} = 4$. Несколько чисел Белла в случае произвольной корреляционной матрицы C приведены в таблице 3.6.

Рассмотрим квантовый случай. В качестве тестового состояния возьмем запутанное состояние $\rho_{2 \otimes 3}$, состоящее из нулей за исключением верхних вершин, равных $1/2$. Квантовые числа Белла рассчитываются с помощью двух унитарных матриц $SU(2)$ для кубита и трех матриц из $SU(3)$ для кутрита. При заданных значениях углов наблюдения за системой, формулы приводят к шести распределениям вероятностей, которые войдут в выражение для стохастической матрицы состояния. Квантовая функция БКХШ для системы бит-трит:

$$B_{2 \otimes 3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_4) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_5) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_5). \quad (3.23)$$

Классический верхний предел $|B| = 4$ достигается на многих точках десятимерного пространства углов Эйлера, отвечающих двум направлениям для кубита и три направления для кутрита. В качестве примера, укажем на состояние со стохастической матрицей:

$$M_{B=-4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Также численными методами были исследованы области углов Эйлера, в которых нарушаются классические неравенства $|B| < 4$. Один из примеров набора таких параметров приведен в таблице 3.4. Индексы 1 и 2 указывают выделенные направления измерения момента кубита, а направления $1', 2', 3'$ относятся к изме-

Угол	Измерения					Измерения				
	1	2	1'	2'	3'	1	2	1'	2'	3'
φ	0	0	0	0	0	0.03	3.19	0	0	0
θ	0	0	π	π	π	0.03	0.22	3.08	3.09	1.65
Числа Белла	$B = -4$					$B = 4.0312$				

Таблица 3.4 – Нарушение неравенств БКХШ для системы кубит-кутрит

рениям кутрита. Несколько более сильное нарушение было также зафиксировано и приведено в таблице 3.5.

Углы	Направления измерения				
	1	2	1'	2'	3'
φ	0.0004	3.1450	0	0	0
θ	0.2368	0.2538	3.1471	3.1292	1.6024
Числа Белла	$B_{2\otimes 3} = 4.0612$				

Таблица 3.5 – Более сильное нарушение неравенства БКХШ для системы кубит-кутрит

В завершение приведем расчет чисел Белла как функции общей матрицы $C_{2\otimes 3}$ в таблице 3.6. Они были получены при нескольких допустимых вероятностных векторах $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}$. Все значения были “апробированы” в численной программе пакета MATLAB и были выявлено отклонение верхних пределов.

3.3. Неравенства типа БКХШ в система из двух кутритов

Стохастическая матрица $M_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}}$ системы из двух тритов есть $M_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}} = M_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \otimes M_{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}}$, где каждая из матриц имеет форму (2.8). В этом случае существуют $2^{12} = 4096$ вершин и чисел Белла. Однако, снова из-за неотрицательности вероятностей входящих в стохастическую матрицу число допустимых вершин сокращается до $3^6 = 729$.

Вершина	Числа БКХШ
00000000	$c_{16} + c_{26} + c_{56} + c_{46} + c_{36} + c_{66}$
00000001	$c_{16} + c_{35} + c_{26} + c_{56} + c_{46} + c_{65}$
01000000	$c_{16} + c_{26} + c_{53} + c_{43} + c_{36} + c_{63}$
01100000	$c_{14} + c_{26} + c_{53} + c_{41} + c_{36} + c_{63}$
01010101	$c_{15} + c_{35} + c_{25} + c_{52} + c_{42} + c_{62}$
10000000	$c_{13} + c_{33} + c_{23} + c_{56} + c_{46} + c_{66}$
10101010	$c_{21} + c_{11} + c_{31} + c_{54} + c_{44} + c_{64}$
11000000	$c_{13} + c_{33} + c_{23} + c_{53} + c_{43} + c_{63}$
11100000	$c_{11} + c_{33} + c_{23} + c_{53} + c_{41} + c_{63}$

Таблица 3.6 – Числа БКХШ в системе кубит-кутрит

Билинейная форма БКХШ для двух тритов имеет вид

$$\begin{aligned}
B_{3 \otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = & 7 - 6x_1 - 6y_1 - 2z_1 - 3x_2 - 3y_2 - z_2 - 6r_1 - \\
& - 6s_1 - 2t_1 - 3r_2 - 3s_2 - t_2 + 4z_1s_1 - 4z_1t_1 + 2z_1s_2 - z_2t_2 - \\
& - 2z_2t_1 + z_2s_2 + 2z_2s_1 + z_2r_2 + 2z_2r_1 + 4x_1r_1 + 2x_1r_2 + 4x_1s_1 + \\
& + 2x_1s_2 + 4x_1t_1 + 2x_1t_2 + 2x_2r_1 + x_2r_2 + 2x_2s_1 + x_2s_2 + 2x_2t_1 + \\
& + x_2t_2 + 4y_1r_1 + 2y_1r_2 + 4y_1s_1 + 2y_1s_2 + 4y_1t_1 + 2y_1t_2 + 2y_2r_1 + \\
& + y_2r_2 + 2y_2s_1 + y_2s_2 + 2y_2t_1 + y_2t_2 + 4z_1r_1 + 2z_1r_2 - 2z_1t_2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Некоторые числа Белла для системы кутрит-кутрит приведены в таблице 3.7. Эти числа получены аналитическим расчетом функции $B_{3 \otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ на всевозможных физических вершинах $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$. В частном случае квантовых корреляций $C_{3 \otimes 3} = I_{3 \otimes 3}$ можно аналитическим расчетом по формуле (3.25) найти некоторые числа Белла. В результате полного численного счета верхний предел оказывается равным $B_{max}^{classical} = 7$.

Квантовые числа Белла получаются выбором шести матриц из $SU(3)$ по три на каждый из кутритов. Это приводит к стохастической матрице 9×9 , кото-

Вершина	Числа Белла
000000000000	$c_{49} + c_{59} + c_{69} + c_{79} + c_{89} + c_{99} + c_{19} + c_{29} + c_{39}$
000000000001	$c_{49} + c_{59} + c_{68} + c_{79} + c_{89} + c_{98} + c_{19} + c_{29} + c_{38}$
100000000000	$c_{49} + c_{59} + c_{69} + c_{79} + c_{89} + c_{99} + c_{13} + c_{23} + c_{33}$
010101010101	$c_{45} + c_{55} + c_{65} + c_{75} + c_{85} + c_{95} + c_{15} + c_{25} + c_{35}$
101010101010	$c_{51} + c_{61} + c_{71} + c_{81} + c_{91} + c_{11} + c_{21} + c_{31} + c_{41}$

Таблица 3.7 – Числа Белла для системы кутрит-кутрит

рая свертывается со специальной корреляционной матрицей $I_{3 \otimes 3}$. Выражение для функции БКХШ для матрицы $I_{3 \otimes 3}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
B_{3 \otimes 3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = & \frac{2 \cos(\theta_1 - \theta_4)}{3} + \\
& + \frac{2 \cos(\theta_1 - \theta_5)}{3} + \frac{2 \cos(\theta_2 - \theta_4)}{3} + \frac{2 \cos(\theta_1 - \theta_6)}{3} + \frac{2 \cos(\theta_2 - \theta_5)}{3} + \\
& + \frac{2 \cos(\theta_3 - \theta_4)}{3} + \frac{2 \cos(\theta_2 - \theta_6)}{3} + \frac{2 \cos(\theta_3 - \theta_5)}{3} - \frac{2 \cos(\theta_3 - \theta_6)}{3}.
\end{aligned} \quad (3.26)$$

Функция (3.26) рассчитывалась для множества углов Эйлера в 12-мерном фазовом пространстве.

3.4. Неравенства типа БКХШ в система из трех кубитов

Число физических вершин, отвечающих за все числа Белла для системы из трех кубитов, равно $2^6 = 64$. Система из трех битов имеет 8×8 стохастическую

матрицу $M_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}} \otimes M_{\mathbf{z}}$. Выбрав матрицу

$$C_{2 \otimes 2 \otimes 2} = I_{2 \otimes 2 \otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

находим функцию БКХШ

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 2 \otimes 2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = & -6 + 8x_2y_1z_1 + 8x_1y_2z_2 + 8x_2y_2z_1 - 8x_2y_2z_2 - 8x_1z_1 + \\ & + 8x_2y_1z_2 - 8y_1z_2 - 8y_1z_1 + 8x_1y_2z_1 - 8x_2z_1 - 8x_1z_2 - 8x_2y_1 - 8x_1y_2 + \\ & + 8x_1 + 4x_2 + 8y_1 + 4y_2 + 8z_1 + 4z_2 - 8y_1x_1 + 8x_1y_1z_1 + 8x_1y_1z_2 - 8y_2z_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

По формуле (3.28) верхний предел равен $B_{max}^{classical} = 6$. В таблице 3.8, приведен расчет чисел Белла для первых 14 вершин по общей матрице $C_{2 \otimes 2 \otimes 2}$.

Квантовые корреляции исследовались в простейшем запутанном состоянии $\hat{\rho}_{2 \otimes 2 \otimes 2}$, которое состоит из нулей за исключением верхних вершин равных $1/2$. Квантовая функция БКХШ для этого состояния есть:

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 2 \otimes 2}(\theta_1, \theta_3, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6) = \\ = \cos(-\varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_6) \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6 - \cos(-\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_6) \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_6 - \\ - \cos(-\varphi_1 - \varphi_4 - \varphi_5) \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - \cos(-\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_5) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_5 - \\ - \cos(-\varphi_1 - \varphi_4 - \varphi_6) \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_6 - \cos(-\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_6) \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_6 - \\ - \cos(-\varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_5) \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_5 - \cos(-\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_5) \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Результаты исследования формы (3.29) для различных значений углов Эйлера можно найти в работе [138]. Нарушения границы БКХШ здесь очень малень-

Вершина			Число Белла
x	y	z	
00	00	00	$c_{18} + c_{28} + c_{38} + c_{48} + c_{58} + c_{68} + c_{78} + c_{88}$
10	00	00	$c_{14} + c_{24} + c_{34} + c_{44} + c_{58} + c_{68} + c_{78} + c_{88}$
11	00	00	$c_{14} + c_{24} + c_{34} + c_{44} + c_{54} + c_{64} + c_{74} + c_{84}$
11	10	00	$c_{12} + c_{22} + c_{34} + c_{44} + c_{52} + c_{62} + c_{74} + c_{84}$
11	11	00	$c_{12} + c_{22} + c_{32} + c_{42} + c_{52} + c_{62} + c_{72} + c_{82}$
11	11	10	$c_{11} + c_{22} + c_{31} + c_{42} + c_{51} + c_{62} + c_{71} + c_{82}$
11	11	11	$c_{11} + c_{21} + c_{31} + c_{41} + c_{51} + c_{61} + c_{71} + c_{81}$
01	01	01	$c_{18} + c_{27} + c_{36} + c_{45} + c_{54} + c_{63} + c_{72} + c_{81}$
10	10	10	$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} + c_{55} + c_{66} + c_{77} + c_{88}$
00	00	01	$c_{18} + c_{27} + c_{38} + c_{47} + c_{58} + c_{67} + c_{78} + c_{87}$
00	00	11	$c_{17} + c_{27} + c_{37} + c_{47} + c_{57} + c_{67} + c_{77} + c_{87}$
00	01	11	$c_{17} + c_{27} + c_{35} + c_{45} + c_{57} + c_{67} + c_{75} + c_{85}$
00	11	11	$c_{15} + c_{25} + c_{35} + c_{45} + c_{55} + c_{65} + c_{75} + c_{85}$
01	11	11	$c_{15} + c_{25} + c_{35} + c_{45} + c_{51} + c_{61} + c_{71} + c_{81}$

Таблица 3.8 – Числа Белла для системы из трех битов

кие при матрице $I_{2 \otimes 2 \otimes 2}$. Для усиления неравенств были апробированы различные функции типа (3.29), соответствующие разным матрицам C . Наилучший результат пока дает число Белла 6.17.

3.5. Связь томографической энтропии с неравенствами БКХШ

Исследуем поведение томографической энтропии в окрестности значений параметров, при которых квантовая механика нарушает обобщенные неравенства БКХШ. Для этого достаточно сравнить области классичности и квантовости,

которые получаются в результате нарушения неравенств в функционалах (3.14) и (2.79).

Идеи о возможных связях между нарушением энтропийных неравенств и нарушением неравенств Белла и БКХШ были высказаны в работах [50], [51]. Высказывалась гипотеза, согласно которой энтропийные неравенства можно свести к неким новым неравенствам Белла, которые можно было бы назвать энтропийными неравенствами Белла. Однако, из-за отсутствия единой вычислительной техники, позволяющей сравнить эти два неравенства во всех точках классичности и квантовости, окончательного ответа на этот вопрос дано так и не было.

Результаты классической томографической теории энтропии полностью содержатся в квантовой томографической теории энтропии. В этом легче всего убедиться, выбирая классические значения совместной энтропии двух кубитов и воспроизводя их в рамках квантового функционала (2.79). Конечно, из-за довольно громоздких выражений для взаимных квантов-томографических энтропий эти вычисления приходилось производить в основном численно в работе [139]. В качестве иллюстрации рассмотрим стохастическую матрицу

$$M_{2\otimes 2}(\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = 0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

для которой совместная томографическая энтропия двух кубитов воспроизводит классический результат $H_{2\otimes 2}(\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = 0) = 2 \ln 2$. Аналогичным образом, можно воспроизвести все значения функционала совместной энтропии классической томографической теории энтропии из квантовой.

Ради определенности рассмотрим систему из двух кубитов. Конкретные численные значения и интервалы углов Эйлера были взяты из работ [137],[138], где зафиксированы области квантовости и классичности с точки зрения сохранения

и нарушения неравенств БКХШ.

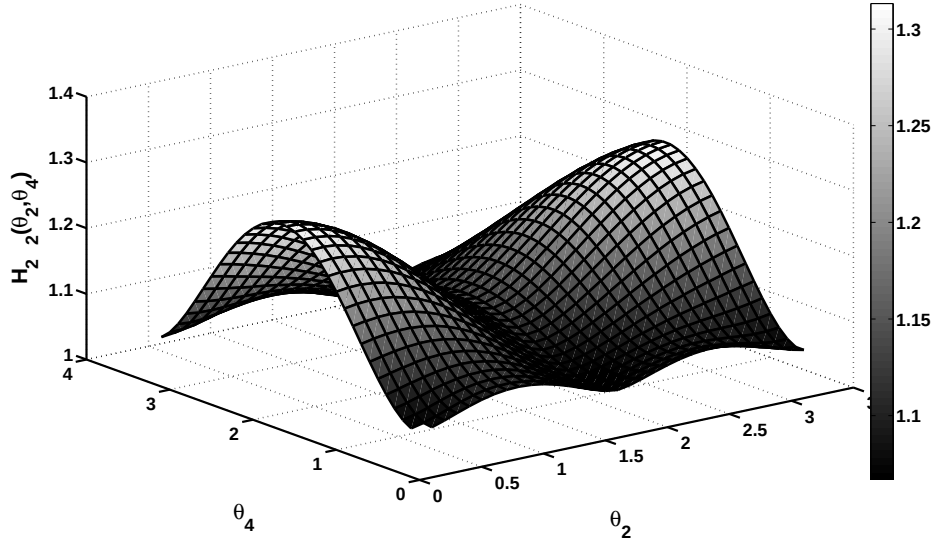


Рисунок 3.8 – Взаимная энтропия $H_{2 \otimes 2}(\theta_2, \theta_4)$ как функция θ_2 и θ_4

Таким образом, задачу отыскания связи между нарушением энтропийных неравенств и нарушением неравенств БКХШ удалось свести к исследованию поведения томографической совместной энтропии на рисунке 3.8. Методом численного расчета [138] было показано, что экстремумы совместной томографической энтропии двух кубитов в очень малой (в пределах 0.1% ошибки) окрестности максимального нарушения неравенства БКХШ равны $H_{max}(Bell) = 1,3132$ и $H_{min}(Bell) = 1,0672$, соответственно. Эти экстремумы, очевидно, не нарушают классические энтропийные неравенства (2.61)–(2.60). Полученный результат показывает, что между значениями функции БКХШ (числами Белла) и совместной томографической энтропией двухкубитной системы не существует однозначной функциональной зависимости. Нарушение неравенств БКХШ не влечет за собой нарушения энтропийных неравенств несмотря на тот факт, что оба неравенства базируются на одной и той же стохастической матрице $M_{2 \otimes 2}(U_1, U_2, U_3, U_4)$, которая, как мы доказали в главах 2 и 3, описывает запутанные состояния. Ни энтропия, ни неравенства БКХШ не могут служить достоверными критериями сепарабельности и запутанности состояний совместных систем.

3.6. Основные выводы и результаты

В третьей главе были выведены и изучены неравенства, аналогичные неравенствам БКХШ, которые нарушаются спиновыми корреляциями в многокудитных системах. Доказано нарушение новых неравенств БКХШ для различных модельных систем кубит-кубит, кубит-кутрит, кутрит-кутрит и кубит-кубит-кубит.

Была разработана программа для ЭВМ на языке MATLAB, позволяющая численно провести аналогичный расчет для систем с произвольным количеством кудитов любых размерностей. Полученный метод расчета верхних границ неравенств БКХШ многокудитных состояний является эффективным способом для численного моделирования. В программе задается общая корреляционная матрица C , количество кудитов N и их размерности d_i , $i = 1, 2, \dots, N$. На выходе программа выдает функцию БКХШ, которую можно исследовать дальше как аналитически, так и численными методами. Программа была создана для корреляционных функций с высокими моментами вида $C \propto \langle m_1^{n_1} m_2^{n_2} \dots m_s^{n_s} \rangle$.

Установлена независимость нарушения энтропийных неравенств и нарушения неравенств БКХШ: исследование сильно скоррелированных спиновых состояний показало, что эти две функции состояния частично свидетельствуют о запутанности или сепарабельности состояния, но независимым образом. Неравенства БКХШ в квантовой томографии были опубликованы в работах [137], [145] и обсуждались на конференциях [144], [145].

Вероятностное представление сжатых состояний

В четвертой главе исследуется КВТ одномодового и двухмодового сжатого вакуума. Мы показываем, что эти состояния можно описать различными томограммами, причем в СТ и ТЦМ эти состояния можно описать с помощью гауссовских распределений вероятностей.

За счет минимизации квантовых флуктуаций $\sigma_{qq} = \sigma_{pp} = 1/2$ когерентное состояние света $|\alpha\rangle$ может аппроксимировать классическое ЭМП с комплексной амплитудой α . Однако, существуют неклассические состояния, для которых квантовые флуктуации по заданной квадратурной компоненте поля могут быть меньше $\sigma_{XX} < 1/2$ [123], [124]. Такие состояния были экспериментально открыты в 1986 году [125] и теперь известны как сжатые состояния [55], [59], [60], [126]. Исторический обзор по сжатым состояниям приведен в [52].

Сжатые состояния света хорошо изучены экспериментально [127], [128]. Задача сжатия света по первой компоненте приобрела особую роль в связи с попытками детектировать гравитационные волны.

Для сжатых состояний $\mathcal{P}(\alpha)$ -распределение Глаубера-Сударшана не является истинным распределением вероятностей. За счет суперпозиции многомодовые сжатые состояния не являются сепарабельными. Другой характерной особенностью сжатых состояний является непугассоновская статистика распределения фотонов. Все эти квантовые особенности распространяются и на СП, ТЦМ и ТСФ.

В параграфе 4.1 рассматриваются одномерные и многомерные сжатые вакуумные состояния ЭМП и вычисляются функции Вигнера и Хусими-Кано. В параграфе 4.2 вычисляются СТ и ТСФ одномерных сжатых состояний вакуума ЭВМ, исследуется вопрос о взаимосвязи между ТСФ и СТ. На базе полученных выражений для СТ проверяются СНШР и энтропийные неравенства для непре-

ривных наблюдаемых. Параграф 4.3 посвящен расчету вероятностных характеристик двухмодовых сжатых состояний вакуума ЭМП на основании СТ. В параграфе 4.4 проводится расчет ТЦМ для двухмодовых сжатых состояний вакуума ЭМП и устанавливается связь ТЦМ с СТ. Полученные результаты затем обобщаются на случай N -модового сжатого состояния вакуума ЭМП. В параграфе 4.5 вычисляется ТСФ для двухмодового сжатого вакуума ЭМП и рассматриваются интегральные преобразования между СТ и ТСФ для двухмодового сжатого вакуума ЭМП.

4.1. Сжатые состояния электромагнитного поля

Для теоретического описания сжатых состояний $|\psi, \xi\rangle$ удобно ввести унитарный оператор сжатия [129]

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left(\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}) \right). \quad (4.1)$$

Величина $\xi = r e^{i\theta}$ называется комплексным параметром сжатия. Ее абсолютное значение $r = |\xi|$ описывает количество сжатия, а угол $0 \leq \theta \leq 2\pi$ определяет угол сжатия на фазовой плоскости. Операторы $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения для одной моды квантованного ЭМП с комплексной амплитудой поля $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Комплексная амплитуда поля связана с действительными полевыми квадратурами q , p посредством соотношений $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$, $\alpha^* = (q - ip)/\sqrt{2}$. Введя действительные вектора $\mathbf{q} = (q, p)^T$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, можно писать $\mathbf{q} = \sqrt{2}\boldsymbol{\alpha}$. Сжатия в чистом состоянии $|\psi\rangle$ осуществляется последовательным применением операции сжатия и сдвига

$$|\psi, \xi, \alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|\psi\rangle, \quad \psi(\xi, x) = \iint dydz \langle z|\hat{D}(\alpha)|y\rangle \langle y|\hat{S}(\xi)|z\rangle \psi(z), \quad (4.2)$$

где $\hat{D}(\alpha)$ оператор сдвига.

Преобразование Боголюбова определяет сжатые операторы уничтожения и рождения по формулам [34]:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, \\ \hat{A}^\dagger = \hat{S}(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(\xi) = v^*\hat{a} + u\hat{a}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Поскольку преобразование Боголюбова сохраняет канонические коммутационные соотношения, то $|u|^2 - |v|^2 = 1$. Поэтому комплексные параметры u , v могут быть параметризованы тремя действительными параметрами $u = e^{i\varphi} \cosh r$, $v = e^{i\phi} \sinh r$. По формуле (4.3) легко найти закон преобразования квадратурных компонент поля q и p

$$\begin{cases} \hat{Q} = \hat{S}(\xi)\hat{q}\hat{S}^\dagger(\xi) = \mu_1\hat{q} + \nu_1\hat{p}, \\ \hat{P} = \hat{S}(\xi)\hat{p}\hat{S}^\dagger(\xi) = \mu_2\hat{q} + \nu_2\hat{p}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где мы ввели четыре действительных параметра $\mu_1 = u_1 + v_1$, $\nu_1 = v_2 - u_2$, $\mu_2 = u_2 + v_2$, $\nu_2 = u_1 - v_1$, связанных соотношением $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = 1$.

Для матричных элементов оператора сжатия из системы (4.4) получаем систему частных дифференциальных уравнений первого порядка. Решением этой системы оказывается функция [140]

$$S(x, y, \xi) = C \exp \frac{i}{\nu_1} \left(-\frac{1}{2}\mu_1 x^2 + xy - \frac{1}{2}\nu_2 y^2 \right), \quad (4.5)$$

где $C = 1/\sqrt{2\pi|\nu_1|}$. В работе [140] параметры u , v , μ_i , ν_i , C были выражены через параметры сжатия r и θ . Поэтому в дальнейших записях можно считать их известными.

Заметим, что матричный элемент оператора одномодового сжатия (4.5) можно интерпретировать как волновую функцию двухмодового сжатого вакуума. Этот факт является следствием выражения для оператора сжатия (4.1), которое создает “двухфотонное когерентное состояние” из вакуума ЭМП.

Поддействовав оператором (4.2), (4.5) на функцию (1.22), получаем выражение

для волновой функции одномодового сжатого состояния

$$\psi(\xi, x) = N \exp(ax^2 + bx), \quad |N| = \sqrt[4]{\frac{-2a_1}{\pi}} \exp \frac{1}{4} \frac{b_1^2}{a_1}, \quad a_1 < 0, \quad (4.6)$$

где введены обозначения $Rea = a_1$, $Reb = b_1$, $Ima = a_2$ и $Imb = b_2$. Эти величины также выражаются через исходные параметры сжатия [140]. Среднее число фотонов в сжатом вакууме:

$$\langle 0, s | \hat{n} | 0, s \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{n} \hat{S}(\xi) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) | 0 \rangle = |v|^2 = \sinh^2 r, \quad (4.7)$$

тогда как в обычном вакууме среднее число фотонов равно нулю.

Физическая система, в которой возможны состояния сжатого вакуума, описывается гамильтонианом параметрического осциллятора [123], [130] с переменной частотой $\omega(t)$

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2(t) \hat{q}^2}{2}. \quad (4.8)$$

Интегралы движения параметрического осциллятора

$$\hat{A}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}(t)\hat{q}), \quad \hat{A}^\dagger(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon^*(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}^*(t)\hat{q}), \quad (4.9)$$

где $\varepsilon(t)$ является решением уравнения движения соответствующего классического параметрического осциллятора, а (4.9) как раз переходит в оператор $\hat{A}_0(t) = \hat{a}e^{it}$ в пределе $\omega(t) \rightarrow 1$. Из определения (4.9) очевидно, что $[\hat{A}^\dagger(t), \hat{A}(t)] = \hat{1}$, $\hat{A}(t)|_{t=0} = \hat{a}$, $\hat{A}^\dagger(t)|_{t=0} = \hat{a}^\dagger$. Роль основного состояния играет $|0, \omega(t)\rangle$ определяемое уравнением $\hat{A}(t)|0, \omega(t)\rangle = 0$. Распределение вероятности для координаты в состоянии $|0, \omega(t)\rangle$ дается выражением:

$$P(x, t) = |\psi_0(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{|\varepsilon(t)|^2}} \exp -\frac{x^2}{|\varepsilon(t)|^2}. \quad (4.10)$$

Отсюда мы можем интерпретировать величину $|\varepsilon(t)|^2/2$ как дисперсию $\sigma_{xx}(t)$ или ширину волнового пакета сжатых одномодовых состояний. Поскольку величина

$\varepsilon(t)$ является решением уравнения для классического осциллятора, у нас появляется возможность создания сжатого вакуума путем подбора такой частотной характеристики $\omega(t)$, при которой существуют такие решения уравнения $\ddot{\varepsilon}(t) + \omega^2(t)\varepsilon(t) = 0$, что $\sigma_{xx}(t) = \frac{1}{2}|\varepsilon(t)|^2 < \frac{1}{2}$.

Как известно, такие решения действительно существуют, например, при линейно растущей частоте: так называемые функции Эри $\varepsilon(t) = Ai(t)$ [31] имеют целые области, в которых $|Ai(t)| < 1$.

Функция Вигнера одномодового сжатого вакуумного состояния равна

$$W(\mathbf{Q}) = (\det M)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)M^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0) \right\}, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{Q} = (q, p)^T$, а величина $\mathbf{Q}_0 = \langle \mathbf{Q} \rangle$ имеет смысл среднего значения вектора $\mathbf{Q}$ в сжатом чистом состоянии, а матрица M , очевидно, представляет собой дисперсионную матрицу для полевых квадратур q, p . Они даются формулами $M = -L^{-1}/2$ и $\mathbf{Q}_0 = M\boldsymbol{\omega}$, где

$$L = \begin{pmatrix} \frac{2|a|^2}{a_1} & -\frac{a_2}{a_1} \\ -\frac{a_2}{a_1} & \frac{1}{2a_1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 2\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{a_1}, -\frac{b_2}{a_1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Аналогично вычисляется функция Хисуми-Кано (1.71)

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left| \int dx \langle x|\alpha \rangle \psi_s(x) \right|^2 = \frac{C_\alpha^2}{|1/2 - a|} \exp \frac{1}{2} Re \frac{(b + \sqrt{2}\alpha)^2}{1/2 - a}, \quad (4.13)$$

где $\langle x|\alpha \rangle$ — волновая функция когерентного состояния (1.10). Полученная функция снова представляет собой гауссовское распределение, поэтому можно записать функцию Хисуми-Кано в виде

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = (\det S)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0)S^{-1}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0) \right\}, \quad (4.14)$$

где матрица S обозначает дисперсионную матрицу для коррелированных амплитуд α_1 и α_2 , $\boldsymbol{\alpha}_0$ — среднее значение вектора $\boldsymbol{\alpha}$, вычисляемое посредством функции

распределения Хусими-Кано в сжатом чистом состоянии. В силу связи между векторами α и $\mathbf{Q}$ для этих величин имеем $S = M/2$, $\alpha_0 = \mathbf{Q}/\sqrt{2}$.

В случае двумерного сжатого вакуума необходимо ввести четырехмерный фазовый вектор $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$. Двумерный оператор сдвига $\hat{D}(\alpha_1, \alpha_2)$ составляется из соответствующих одномерных операторов $\hat{D}(\alpha_1, \alpha_2) = \hat{D}(\alpha_1) \otimes \hat{D}(\alpha_2)$, $\hat{D}(\alpha_j) = e^{\alpha_j \hat{a}_j^\dagger - \alpha_j^* \hat{a}_j}$, $j = 1, 2$. Операторы $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$ — одномодовые операторы уничтожения и рождения фотона, действующие на состояние i -го числа заполнения $|n_i\rangle$ с коммутационными соотношениями $[\hat{a}_i \hat{a}_k] = [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k^\dagger] = 0$, $[\hat{a}_i \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{ik}$.

Определим теперь собственные значения бозонных операторов уничтожения $\hat{a}_i$ согласно $\alpha_i = q_i + ip_i/\sqrt{2}$. Возникающее четырехмерное оптическое фазовое пространство может быть описано векторами $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ и $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$, составленными из собственных значений векторных операторов $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)^T$ и $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)^T$, т.е. для $i = 1, 2$ имеем по определению $\hat{q}_i |q_1 q_2\rangle = q_i |q_1 q_2\rangle$, $\hat{p}_i |p_1 p_2\rangle = p_i |p_1 p_2\rangle$.

Двухмодовое сжатое вакуумное состояние определяется [58], [131]:

$$|\psi, \xi, \alpha_1, \alpha_2\rangle = \hat{D}(\alpha_1, \alpha_2) \hat{S}_{12}(\xi) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, \quad (4.15)$$

где унитарный двухмодовый оператор сжатия равен

$$\hat{S}_{12}(\xi) = \exp \left(\xi \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \xi^* \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right). \quad (4.16)$$

По аналогии с одномерными преобразованиями Боголюбова (4.3) сжатые двухмодовые операторы рождения и уничтожения определяются посредством

$$\begin{cases} \hat{A}_i = \hat{S}(\xi) \hat{a}_i \hat{S}^\dagger(\xi) = U_{ik} \hat{a}_k + V_{ik} \hat{a}_k^\dagger, \\ \hat{A}_j^\dagger = \hat{S}(\xi) \hat{a}_j^\dagger \hat{S}^\dagger(\xi) = V_{jl}^* \hat{a}_l + U_{jl}^* \hat{a}_l^\dagger. \end{cases} \quad (4.17)$$

Здесь U_{ik} и V_{ik} — двумерные комплексные матрицы. Они содержат восемь комплексных или шестнадцать вещественных параметров. Условие сохранения ком-

мутационных соотношений приводит к следующим ограничениям:

$$\begin{cases} UV^T - VU^T = 0, \\ UU^\dagger - VV^\dagger = 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Второе условие только действительно, тогда как первое должно выполняться как для вещественной части, так и для комплексной. Поэтому остается только пять комплексных или десять действительных параметров для описания двухмодового сжатия [57]. Матричные элементы оператора сжатия в координатном базисе:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \xi) = S_0 e^{i(-\frac{1}{2}\mathbf{x}S_1\mathbf{x} + \mathbf{x}S_{12}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{y}S_2\mathbf{y})}. \quad (4.19)$$

Здесь S_1 и S_2 — эрмитовы матрицы, задаваемые матрицами U и V в [57], [146], а S_0 определяется из условия унитарности $S_0 = \sqrt{|\det S_{12}|}/2\pi$.

Точно так же, как и в одномерном случае, мы преобразовываем волновую функцию двухмодового вакуума $\psi_0(\mathbf{z})$ в двухмодовое сжатое состояние $\psi(\xi, \mathbf{x})$. Пользуясь определением (4.15), получаем:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, x_1, x_2) &\equiv \langle \mathbf{x} | \psi, \xi \rangle = \int \int dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 \langle \mathbf{x} | \hat{D}(\boldsymbol{\alpha}) | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \hat{S}(\xi) | \mathbf{z} \rangle \psi_0(\mathbf{z}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{i}{2}\mathbf{q}\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \int d\mathbf{z} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^2} S(\mathbf{x} - \mathbf{q}, \mathbf{z}) = \tilde{N} e^{-\frac{1}{4}(\mathbf{x}-\mathbf{q})^T M^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) + i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Матрица M задается уравнением $M = (2iS_1 + 4S_{12}(1 + iS_2)^{-1}S_{12})^{-1}$ [140]. Постоянная нормировки $\tilde{N} \propto (\det M)^{-\frac{1}{4}}$. Векторы $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ представляют собой количества сдвига по первым и вторым квадратурным компонентам поля. Тогда, очевидно, что волновая функция чистого состояния двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля записывается в виде гауссиана

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= N e^{\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{x}^T}, \\ |N| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2 \right)^{1/4} \exp -\frac{1}{4} \frac{(A_1 E_1^2 - C_1 D_1 E_1 + B_1 D_1^2)}{A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Квадратичные члены в гауссовском пакете (4.21) появляются из-за операции сжатия, а линейные члены за счет сдвига вакуумного состояния. Связь между исходной матрицей M , содержащей информацию о параметрах сжатого вакуума и количеством сдвига α , с феноменологической матрицей A и вектором $\mathbf{b}$ дается в Приложении А.

Волновая функция двухмодового сжатого вакуума (4.21) представляет собой прямое обобщение одномодового сжатого вакуума (4.6). Двухмодовый сжатый вакуум (4.21) описывается пятью комплексными параметрами A, B, C, D, E или десятью действительными $ReA = A_1, ReB = B_1, ReC = C_1, ReD = D_1, ReE = E_1, ImA = A_2, ImB = B_2, ImC = C_2, ImD = D_2, ImE = E_2$.

4.2. Общая томография сжатых состояний

В данном разделе рассмотрим схемы построения различных томографических распределений для одномодового состояния сжатого вакуума. Многие полученные результаты сможем впоследствии непосредственно обобщить на случай многомодового сжатого вакуума.

Для одной моды электромагнитного поля КВТ определяется прямым преобразованием Радона матрицы плотности (1.56). Подставляя (4.6) в выражение (1.56), после интегрирования гауссовского интеграла (1.49) получаем томографическое распределение квадратуры X в виде гауссиана

$$w_s(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{XX}}} \exp -\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2\sigma_{XX}} \quad (4.23)$$

с центром волнового пакета в точке $X_0 = \langle X \rangle$ и со средним квадратичным откло-

нением σ_{XX} . Среднее значение амплитуды поля равно

$$\begin{cases} \langle X \rangle = \mu \langle q \rangle + \nu \langle p \rangle, \\ \langle q \rangle = -\frac{1}{2} \frac{b_1}{a_1}, \quad \langle p \rangle = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Дисперсия равна

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = \mu^2 \sigma_{qq} + 2\mu\nu \sigma_{qp} + \nu^2 \sigma_{pp}, \\ \sigma_{qq} = -\frac{1}{4} \frac{1}{a_1}, \quad \sigma_{pp} = -\frac{|a|^2}{a_1}, \quad \sigma_{qp} = -\frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Здесь q, p — одномодовые исходные квадратуры квантового поля до сжатия. Отсюда мы сразу получаем дисперсионную матрицу одномодового поля

$$\sigma = -\frac{1}{4} \frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} 1 & 2a_2 \\ 2a_2 & 4|a|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Пользуясь (4.25), можно проверить выполнение СНШР

$$\begin{cases} \sigma_{qq} \geq 0, \quad \sigma_{pp} \geq 0, \\ \sigma_{qq}\sigma_{pp} = \frac{1}{4} \frac{|a|^2}{a_1^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{a_2^2}{a_1^2} \equiv \frac{1}{4} + \sigma_{qp}^2. \end{cases} \quad (4.27)$$

Установлено, что в сжатом состоянии СНШР минимизируется. По этой причине состояние (4.6) можно назвать состоянием минимальной неопределенности.

Проверим выполнение энтропийного соотношения неопределенностей для оптической томограммы, соответствующей сжатому одномодовому вакууму. Энтропия оптической томограммы сжатого вакуума равна (2.68)

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \ln (2\pi e (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta + c \sin 2\theta)). \quad (4.28)$$

Для краткости обозначений мы ввели запись $a = \sigma_{qq}$, $b = \sigma_{pp}$, $c = \sigma_{qp}$. Соотношение неопределенностей (2.77) приводит к неравенству

$$ab + \left(\frac{(a-b)^2}{4} - c^2 \right) \sin^2 2\theta + \frac{(a-b)c}{2} \sin 4\theta \geq \frac{1}{4}. \quad (4.29)$$

Принимая во внимание выполнение СНШР (4.27), соотношение (4.29) можно записать в виде

$$\left(\frac{(a-b)c}{2} \sin 2\theta + c \cos 2\theta \right)^2 \geq 0. \quad (4.30)$$

Таким образом, сжатое одномодовое состояние вакуума удовлетворяет не только СНШР, но также энтропийному неравенству (2.77).

Рассмотрим теперь томографию счета фотонов (ТСФ) (1.87). Подставив матрицу плотности, выраженную через волновые функции (4.6) в определение (1.87), получается следующее общее выражение для ТСФ одномодового сжатого вакуума:

$$\begin{aligned} w_\gamma(n, \alpha) &= \int \int dx dy du dv \psi_n(x) \psi_n^*(y) \psi(u) \psi^*(v) \langle y | \hat{D}^\dagger(\alpha) | u \rangle \langle v | \hat{D}(\alpha) | x \rangle = \\ &= \int \int \int \int dx dy \psi_n(x) \psi^*(x+q) e^{ipx} \psi_n^*(y) \psi(y+q) e^{-ipy} = \\ &= \left| \int dx \psi_n(x) \psi(x+q) e^{-ipx} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\psi_n(x)$ — собственные функции квантового гармонического осциллятора

$$\psi_n(x) \equiv \langle x | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \pi^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.32)$$

а функции $H_n(x)$ — многочлены Эрмита [75].

Подставляя в.ф. (4.6) и (4.32) в (4.33), получаем томографическое распределение вероятностей для сжатого одномодового вакуумного состояния

$$w_p(n, \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{2^n n!} (-a_1)^{1/2} e^{\frac{1}{2} \frac{b_1^2}{a_1}} e^{-\frac{1}{2} q^2} |I(n, \alpha)|^2, \quad (4.33)$$

где функция $I(n, \alpha)$ определяется интегралом

$$I(n, \alpha) = \int dx e^{-\xi x^2 + gx} H_n(x - q), \quad (4.34)$$

и вводятся обозначения $\xi = \frac{1}{2} - a$, $g = b + q - ip = b + \sqrt{2}\alpha^*$. Представление статистики фотонов в виде (4.33) удобно для численных расчетов. Однако, во

многих приложениях более удобно использовать другую форму интеграла $I(n, \alpha)$. После элементарных алгебраических преобразований приведем ТСФ (4.33) к виду

$$w_p(n, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{|N|^2}{2^n n!} \frac{1}{|1 - 2a|} \left| \exp(aq^2 + bq + y^2) \right|^2 J(n, \alpha). \quad (4.35)$$

Здесь мы обозначили интеграл

$$J(n, \alpha) = \left| \int dx e^{-(x-y)^2} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{\xi}} \right) \right|^2 \quad (4.36)$$

и ввели параметры $\eta = 2aq + b - ip$, $y = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}} = \frac{b + 2aq - ip}{\sqrt{2(1 - 2a)}}$. Заметим свойство $J(0, \alpha) = \pi$. Вероятность не обнаружить ни одного фотона в сжатом вакууме дается формулой

$$w_\gamma(0, 0) = \sqrt{\frac{-8a_1}{4a_1^2 - 4a_1 + 4a_2^2 + 1}} \exp \left(\frac{b_1^2 + 4a_1^2 b_2^2 + 4a_2^2 b_1^2 - a_1 (2b_1^2 + 8a_2 b_1 b_2 + 2b_2^2)}{2a_1 (4a_1^2 - 4a_1 + 4a_2^2 + 1)} \right). \quad (4.37)$$

Выражение (4.37) равно единице при $b = 0$ и $a = -1/2$, что соответствует тривиальному случаю измерения числа фотонов в несжатом вакууме. Вероятность не обнаружить ни одного фотона ($n = 0$) в сжатом когерентном состоянии ($\alpha \neq 0$) равна

$$w_\gamma(0, \alpha) = \frac{\sqrt{-2a_1}}{|1/2 - a|} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{b_1^2}{a_1} \right) \left| \exp \left(aq^2 + bq + \frac{1}{2} \frac{(2aq + b - ip)^2}{1 - 2a} \right) \right|^2. \quad (4.38)$$

Легко проверить, что функция (4.38) приближается к пределу $e^{-|\alpha|^2}$ для несжатого основного состояния поля $b = 0$, $a = -1/2$, т.е. $w_\gamma(0, \alpha, -1/2, 0) = e^{-|\alpha|^2} = e^{-\bar{n}_\alpha}$, где $\bar{n}_\alpha = |\alpha|^2$ есть среднее число фотонов в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. С учетом выражения (4.38) томограмма числа фотонов записывается в виде:

$$w_\gamma(n, \alpha) = \frac{1}{\pi 2^n n!} w_p(0, \alpha) J(n, \alpha). \quad (4.39)$$

В зависимости от конкретных задач квантовой оптики общее выражение для ТСФ

может быть также записано в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} w_\gamma(n, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{|\psi(q)|^2}{2^n n!} \frac{1}{|\xi|} \left| \exp \left(\frac{\eta^2}{4\xi} \right) \right|^2 J(n, \alpha) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{|N|^2}{2^n n!} \frac{1}{|\xi|} \left| \exp \left(aq^2 + bq + \frac{\eta^2}{4\xi} \right) \right|^2 J(n, \alpha). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Мы ожидаем, что полученная ТСФ перейдет в распределение Пуассона для несжатого основного состояния гармонического осциллятора. В самом деле, в пределе $b = 0$, $a = -1/2$ интеграл (4.42) упрощается [75] и при параметрах $\xi = 1$, $y = \frac{\eta}{2}$ переходит в $J(n, \alpha) = \pi 2^n |\alpha|^{2n}$. Отсюда, получаем томограмму основного состояния гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} w_\gamma \left(n, \alpha, -\frac{1}{2}, 0 \right) &= \sqrt{\pi} \frac{|\eta|^{2n}}{2^n n!} |\psi_0(q)|^2 \left| \exp \frac{\eta^2}{4} \right|^2 = \\ &= \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-2\alpha_1^2} e^{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = e^{-\bar{n}_\alpha} \frac{\bar{n}_\alpha^n}{n!} \equiv P_n(\alpha), \end{aligned} \quad (4.41)$$

где $P_n(\alpha)$ — распределение вероятностей Пуассона.

Точное аналитическое выражение для функции $J(n, \alpha)$ дается формулой [75]

$$J(n, \alpha) = \left| \int dy e^{-\left(y - \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right)^2} H_n \left(\frac{y}{\sqrt{\xi}} \right) \right|^2 = \pi \left| 1 - \frac{1}{\xi} \right|^n \left| H_n \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi^2 - \xi}} \right) \right|^2. \quad (4.42)$$

Приведем для полноты окончательное выражение для ТСФ

$$\begin{aligned} w_\gamma(n, \alpha) &= w_p(0, 0) \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha_0^T M \alpha_0}}{2^n n!} \left(\frac{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_1}{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 - 4a_1} \right)^{n/2} \times \\ &\times \left| H_n \left(\frac{2b + \sqrt{2}\alpha(2a - 1) + \sqrt{2}\alpha^*(2a + 1)}{2\sqrt{1 - 4a^2}} \right) \right|^2 e^{-\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)^T M (\alpha - \alpha_0)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Полный вывод формулы (4.43) содержится в Приложении А.

Пользуясь выражением (1.59) для квантайзера симплектической томографии

и деквантайзера для томографии числа фотонов, получим:

$$\begin{aligned} K_s^p(X, \mu, \nu, n, \alpha) &= \frac{e^{iX}}{2\pi} \langle n | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\xi) \hat{D}(\alpha) | n \rangle = \\ &= \frac{e^{i(X-\mu q-\nu p)}}{2\pi} e^{-\frac{\mu^2 + \nu^2}{4}} L_n \left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

где мы воспользовались формулой (A.11) для матричных элементов оператора сдвига в представлении числе заполнения и соотношением $\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\xi) \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\nu, -\mu) e^{-i(\mu q + \nu p)}$. Функции $L_n(x)$ — многочлены Лагерра.

Соотношение (4.44) устанавливает интегральную связь между многочленами Эрмита и Лагерра. Связь между томограммой числа фотонов и симплектической томограммой дается уравнением

$$w_p(n, \alpha) = \int \frac{e^{i(X-\mu q-\nu p)}}{2\pi} e^{-\frac{\mu^2 + \nu^2}{4}} L_n \left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \right) w_s(X, \mu, \nu) dX d\mu d\nu. \quad (4.45)$$

Преобразование (4.44) устанавливает определенные соотношения между ортогональными многочленами Эрмита и Лагерра. В самом деле, подробно записав (4.44), получаем

$$\begin{aligned} &w_\gamma(0, 0) \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha_0 M \alpha_0}}{2^n n!} \left(\frac{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_1}{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 - 4a_1} \right)^{n/2} \times \\ &\times \left| H_n \left(\frac{2b + \sqrt{2}\alpha(2a-1) + \sqrt{2}\alpha^*(2a+1)}{2\sqrt{1-4a^2}} \right) \right|^2 e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)M(\alpha-\alpha_0)} = \\ &= \int \frac{e^{i(X-\mu q-\nu p)}}{2\pi} e^{-\frac{\mu^2 + \nu^2}{4}} L_n \left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{XX}}} e^{-\frac{(X-\langle X \rangle)^2}{2\sigma_{XX}}} dX d\mu d\nu. \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.3. Симплектическая томография двухмодовых сжатых состояний вакуума

В этом разделе рассмотрим СТ двухмодового сжатого вакуума, определяемую уравнением

$$w_s(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = Tr \hat{\rho} \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2). \quad (4.47)$$

Параметры μ_k, ν_k действительные и определяют систему отсчета, в которой мы производим измерения величин X_k . Таким образом, СТ (4.47) является функцией от шести действительных переменных измерения. Квадратурные компоненты X_1, X_2 могут быть компактно описаны двумерным вектором $\mathbf{X}$, то же самое справедливо для набора параметров μ_k, ν_k , т.е. $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)^T$.

Пользуясь той же техникой вычислений, как и в одномерном случае, получаем общее выражение для СП чистого состояния с волновой функции $\psi(x_1, x_2)$:

$$w_s(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\pi|\nu_1|} \frac{1}{2\pi|\nu_2|} \left| \int \psi(x_1, x_2) e^{\frac{i\mu_1}{2\nu_1}x_1^2 + \frac{i\mu_2}{2\nu_2}x_2^2 - \frac{iX_1}{\nu_1}x_1 - \frac{iX_2}{\nu_2}x_2} dx_1 dx_2 \right|^2. \quad (4.48)$$

Для вычисления интеграла необходимо воспользоваться формулой (A.3) из Приложения, тогда после простых, но громоздких алгебраических выкладок, получим следующее выражение для СП двухмодового вакуума

$$w_s(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}. \quad (4.49)$$

Вектор $\mathbf{X}_0$ обозначает средние томографических амплитуд X_i , а $\sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ и дисперсии. Полный вывод выражения (4.49) содержится в Приложении А.

Средние значения томографических квадратур как функции от параметров μ_i, ν_i получаются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X_1 \rangle = \mu_1 \langle q_1 \rangle + \nu_1 \langle p_1 \rangle, \quad \langle X_2 \rangle = \mu_2 \langle q_2 \rangle + \nu_2 \langle p_2 \rangle, \\ \langle q_1 \rangle = \frac{B_1 D_1 + C_1 E_1}{2(A_1 B_1 - C_1^2)}, \quad \langle q_2 \rangle = \frac{A_1 E_1 + C_1 D_1}{A_1 B_1 - C_1^2}, \\ \langle p_1 \rangle = \frac{E_1(A_1 C_2 - A_2 C_1) - D_1(A_2 B_1 - C_1 C_2) + D_2(A_1 B_1 - C_1^2)}{A_1 B_1 - C_1^2}, \\ \langle p_2 \rangle = \frac{D_1(B_1 C_2 - B_2 C_1) - E_1(A_1 B_2 - C_1 C_2) + E_2(A_1 B_1 - C_1^2)}{A_1 B_1 - C_1^2}, \end{array} \right. \quad (4.50)$$

и их дисперсии

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{X_1 X_1} = \mu_1^2 \sigma_{q_1 q_1} + 2\mu_1 \nu_1 \sigma_{q_1 p_1} + \nu_1^2 \sigma_{p_1 p_1}, \\ \sigma_{X_2 X_2} = \mu_2^2 \sigma_{q_2 q_2} + 2\mu_2 \nu_2 \sigma_{q_2 p_2} + \nu_2^2 \sigma_{p_2 p_2}, \\ \sigma_{q_1 q_1} = \frac{B_1}{4(A_1 B_1 - C_1^2)}, \quad \sigma_{q_1 p_1} = \frac{C_1 C_2 - B_1 A_2}{2(A_1 B_1 - C_1^2)} \\ \sigma_{p_1 p_1} = \frac{A_1^2 B_1 - A_1 C_1^2 + A_1 C_2^2 + A_2^2 B_1 - 2A_2 C_1 C_2}{A_1 B_1 - C_1^2}, \\ \sigma_{q_2 q_2} = \frac{A_1}{4(A_1 B_1 - C_1^2)}, \quad \sigma_{q_2 p_2} = \frac{C_1 C_2 - A_1 B_2}{2(A_1 B_1 - C_1^2)} \\ \sigma_{p_2 p_2} = \frac{A_1 B_1^2 - B_1 C_1^2 + B_1 C_2^2 + B_2^2 A_1 - 2B_2 C_1 C_2}{A_1 B_1 - C_1^2}. \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Приведем также значение корреляций между квадратурными компонентами

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{X_1 X_2} = \mu_1 \mu_2 \sigma_{q_1 q_2} + \mu_1 \nu_2 \sigma_{q_1 p_2} + \nu_1 \mu_2 \sigma_{p_1 q_2} + \nu_1 \nu_2 \sigma_{p_1 p_2} \\ \sigma_{q_1 q_2} = \frac{A_1}{4(A_1 B_1 - C_1^2)}, \quad \sigma_{q_1 p_2} = \frac{C_2 B_1 - B_2 C_1}{2(A_1 B_1 - C_1^2)}, \quad \sigma_{p_1 q_2} = \frac{C_2 A_1 - A_2 C_1}{2(A_1 B_1 - C_1^2)} \\ \sigma_{p_1 p_2} = \frac{-A_1 B_1 C_1 + A_2 B_2 C_1 + C_1^3 + C_1 C_2^2 - A_1 C_2^2 - A_1 B_2 C_2 - A_2 B_1 C_2}{A_1 B_1 - C_1^2} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Как и одномерном случае дисперсии задаются исключительно матрицей A , тогда как средние определяются также вектором $\mathbf{b}$.

Для двухмодового сжатого вакуума СНШР проверяются точно так же как и в одномерном случае (4.27). В самом деле, непосредственной проверкой устанавливается, что $\det \Sigma = 1/16$. Таким образом, двухмодовый сжатый вакуум также является состоянием минимальной неопределенности.

4.4. Томография центр масс двухмодового сжатого вакуума

Значимость томографического представления квантовых состояний посредством томограммы центр масс (ТЦМ) была выявлена в работах [132], [133], [134]. Идея ТЦМ заключается в том, чтобы сделать главным наблюдаемым n -модовой

квантовой системы простую сумму X_c квадратур X_i , каждая из которых определена в своей системе отсчета μ_i, ν_i

$$X_c = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (4.53)$$

поэтому ТЦМ для двухмодового состояния была определена в [132] формулой

$$w_c(X, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \text{Tr} \hat{\rho} \delta(X - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2). \quad (4.54)$$

В простейшем случае, когда $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} = 0$, мы имеем острое распределение $w_c(X, 0) = \delta(X)$, которое, очевидно, соответствует томограмме, измеренной в собственной “системе центра масс”, задаваемой уравнением $X_1 + X_2 = 0$.

В отличие от СП (4.47) ТЦМ (4.54) зависит только от пяти действительных переменных. Их можно измерить непосредственно на опыте, измерив сперва значения амплитуды X в нескольких системах отсчета, задаваемых параметрами $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$. Записав матрицу плотности $\hat{\rho}$ в координатном представлении и беря гауссовский интеграл, мы получаем для ТЦМ выражение

$$w_c(X, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{X_c X_c}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X - \langle X \rangle_c)^2}{\sigma_{X_c X_c}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})}}. \quad (4.55)$$

Детальный расчет выражения (4.55) для ТЦМ приведен в Приложении А к диссертации. Среднее значение $\langle X \rangle_c$ и дисперсия $\sigma_{X_c X_c}$ даются формулами:

$$\begin{cases} \langle X \rangle_c = \mu_1 \langle q_1 \rangle + \nu_1 \langle p_1 \rangle + \mu_2 \langle q_2 \rangle + \nu_2 \langle p_2 \rangle, \\ \sigma_{X_c X_c} = \mu_1^2 \sigma_{q_1 q_1} + 2\mu_1 \nu_1 \sigma_{q_1 p_1} + \nu_1^2 \sigma_{p_1 p_1} + \mu_2^2 \sigma_{q_2 q_2} + 2\mu_2 \nu_2 \sigma_{q_2 p_2} + \\ + \nu_2^2 \sigma_{p_2 p_2} + 2\mu_1 \mu_2 \sigma_{q_1 q_2} + 2\mu_1 \nu_2 \sigma_{q_1 p_2} + 2\nu_1 \mu_2 \sigma_{p_1 q_2} + 2\nu_1 \nu_2 \sigma_{p_1 p_2}. \end{cases} \quad (4.56)$$

Легко установить соотношение между СП и ТЦМ. В самом деле, пользуясь определениями (4.47) и (4.54), можно записать выражение

$$w_c(X, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int w_s(Y_1, Y_2, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) \delta(X - Y_1 - Y_2) dY_1 dY_2, \quad (4.57)$$

которое элементарно проверяется подстановкой (4.47) в (4.57):

$$\begin{aligned}
w_c(X, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) &= \\
= Tr \hat{\rho} \int \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2) \delta(X - Y_1 - Y_2) dY_1 dY_2 &= \\
= Tr \hat{\rho} \int \delta(Y_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2) \delta(X - Y_2 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) dY_2 &= \\
= Tr \hat{\rho} \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2). &
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Точно так же устанавливается обратное преобразование

$$w_s(X_1, X_2, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int w_c(Y, k_1 \mu_1, k_1 \nu_1, k_2 \mu_2, k_2 \nu_2) e^{i(Y - \mathbf{kX})} d\mathbf{k} dY, \tag{4.59}$$

где вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ используется для преобразования Фурье. Серия соотношений (4.57)–(4.59) показывает переполненность метода описания квантовых состояний посредством симплектической томографии. Однако, переполненность снимается свойством однородности томограммы.

Соотношения между симплектической и ТЦМ легко обобщить на случай более высоких измерений, записав их в виде

$$\begin{aligned}
w_c(X, \mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n) &= \\
= \int w_s(Y_1, \dots, Y_n, \mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n) \delta(X - \sum_{i=1}^n Y_i) dY_1 \dots dY_n, &
\end{aligned} \tag{4.60}$$

обратное преобразование дается формулой

$$w_s(X_1, X_2, \dots, \mu_n, \nu_n) = \int w_c(Y, k_1 \mu_1, k_1 \nu_1, \dots, k_n \mu_n, k_n \nu_n) e^{i(Y - \mathbf{kX})} d\mathbf{k} dY, \tag{4.61}$$

где вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ введен для осуществления многомерного преобразования Фурье. Обобщенные соотношения (4.60)–(4.61) позволяют сократить число наблюдаемых необходимых для измерения квантового состояния от $3n$ до $2n + 1$.

4.5. Томография счета фотонов для двухмодового сжатого вакуума

Альтернативный способ восстановления сжатых двухмодовых состояний заключается в измерениях ТСФ аналогично одномодовому случаю. В данном разделе мы остановимся на расчете двумерной ТСФ для сжатых состояний вакуума ЭМП. ТСФ определяется [54], [57]

$$w_\gamma(n_1, n_2, \alpha_1, \alpha_2) = \langle n_1 n_2 | \hat{D}^\dagger(\alpha_1, \alpha_2) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha_1, \alpha_2) | n_1 n_2 \rangle = \langle \mathbf{n} | \hat{\rho}_\alpha | \mathbf{n} \rangle, \quad (4.62)$$

где $\hat{D}(\alpha_1, \alpha_2)$ — двухмодовый оператор сдвига, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$, $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку двухмодовая томограмма (4.62) является диагональным элементом сдвинутой матрицы плотности $\hat{\rho}_\alpha$, ее неотрицательность очевидна. Проверим, что многомодовая ТСФ нормализована

$$\sum_{n_1 n_2} w_\gamma(\mathbf{n}, \alpha) = \text{Tr} \left(\left(\sum_{n_1 n_2} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| \right) \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha) \right) = \text{Tr} \hat{\rho} = 1. \quad (4.63)$$

Вычислив матричный элемент (4.62) получаем

$$\begin{aligned} w_\gamma(\mathbf{n}, \alpha) &= \iint d\mathbf{x} d\mathbf{y} \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x} + \mathbf{q}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y} + \mathbf{q}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{y}} = \\ &= \left| \int d\mathbf{x} \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{q}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ обозначает волновые функции двухмодового фоковского состояния ЭМП

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{n} \rangle = \langle x_1 | n_1 \rangle \cdot \langle x_2 | n_2 \rangle = \pi^{-1/2} \frac{e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}}{\sqrt{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}} H_{n_1}(x_1) H_{n_2}(x_2). \quad (4.65)$$

Здесь $H_{n_i}(x_i)$ — обычные одномерные полиномы Эрмита.

Из вывода формулы (4.64), ясно, что она справедлива для произвольного N -модового состояния ЭМП. Ее можно рассмотреть как непосредственное обобщение формулы (4.33) для ТСФ одномодового поля.

Преобразуем интеграл (4.64) к виду

$$w_p(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!} \left(A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2 \right)^{1/2} \times \exp - \frac{1}{2} \frac{(A_1 E_1^2 - C_1 D_1 E_1 + B_1 D_1^2)}{A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2} |I(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})|^2, \quad (4.66)$$

где функция $I(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})$ определена согласно

$$I(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \int d\mathbf{x} e^{-\mathbf{x}^T M \mathbf{x} + \mathbf{g} \mathbf{x}^T} H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \quad (4.67)$$

и $M = 1/2 - A$, $\mathbf{g} = \mathbf{b} + \sqrt{2}\boldsymbol{\alpha}^*$. Для получения нормировочной постоянной двухмодовой ТСФ необходимо подставить $\mathbf{n} = 0$ и $\boldsymbol{\alpha} = 0$ в формулы (4.66)–(4.67). После подстановки получаем

$$w_\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{2(A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2)^{1/2}}{|\det A - \frac{1}{2} \text{Tr} A + \frac{1}{4}|} \exp - \frac{1}{2} \frac{(A_1 E_1^2 - C_1 D_1 E_1 + B_1 D_1^2)}{A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2} \times \left| \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{(A - \frac{1}{2})E^2 + (B - \frac{1}{2})D^2 + CDE}{(A - \frac{1}{2})(B - \frac{1}{2}) - \frac{C^2}{4}} \right) \right|^2. \quad (4.68)$$

Очевидно, выражение (4.68) дает вероятность не обнаружить ни одного фотона ни в одной из мод двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля.

Можно записать двухмодовую ТСФ в виде функции от двумерных полиномов Эрмита. Для этого, снова рассмотрим выражение (4.64) и представим его в виде

$$w_\gamma(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\pi}{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!} |\psi(\mathbf{q})|^2 |J(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha})|^2, \quad (4.69)$$

где

$$J(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \int d\mathbf{x} H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) e^{-\mathbf{x}^T M \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{x}} \quad (4.70)$$

и введен вектор $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b} + \mathbf{q}A - i\mathbf{p} = \mathbf{b} + 2A\mathbf{q} - i\mathbf{p}$.

Интеграл (4.69) можно вычислить по общей формуле для гауссовских интегралов с многомерными полиномами Эрмита приведенной в Приложении А, в

которой необходимо подставить следующие значения параметров $N = 2$, $\mathbf{\Lambda} = 0$, $\mathbf{d} = 0$, $\mathbf{n} = 0$, $S = 1$, $T = 0$, $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}$. Тогда получаем,

$$J(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\pi}{\sqrt{\det M}} \exp \left(\frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} M^{-1} \boldsymbol{\omega} \right) H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y}), \quad (4.71)$$

где

$$\begin{cases} R = R_{11} = 1 - \frac{1}{2} M^{-1}, \\ \mathbf{y} = R_{11}^{-1} \mathbf{z}_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} M^{-1} \right)^{-1} M^{-1} \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (4.72)$$

Выражение для двухмодовой ТСФ примет вид

$$w_p(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\pi}{2^{n_1+n_2} \mathbf{n}!} \frac{1}{|\det M|} \left| \psi(\mathbf{q}) \exp \left(\frac{1}{4} \boldsymbol{\omega} M^{-1} \boldsymbol{\omega} \right) \right|^2 \left| H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y}) \right|^2. \quad (4.73)$$

Если ввести четырехмерный фазовый вектор $\mathbf{Q}$ и воспользоваться техникой приведения симметрических билинейных форм к каноническому виду (см. Приложение А), то выражение (4.73) для ТСФ можно будет переписать в виде

$$w_\gamma(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = w_p(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \frac{e^{\frac{1}{2} \mathbf{Q}_0 \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{Q}_0}}{2^{n_1+n_2} \mathbf{n}!} |H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y})|^2 e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0) \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)}, \quad (4.74)$$

где $\sigma = \frac{1}{2} V_1^{-1}$, а V является 4×4 блочной матрицей

$$V = V_1 + iV_2 = \begin{pmatrix} -4A(1 + M^{-1}A) & 2iAM^{-1} \\ 2iAM^{-1} & M^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Значение вектора $\mathbf{Q}_0$ дается уравнением

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}_1 - V_1^{-1} V_2 \mathbf{R}_2, \quad (4.76)$$

где комплексный вектор

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + i\mathbf{R}_2 = 2V^{-1} \begin{pmatrix} (1 + M^{-1}A)\mathbf{b} \\ iM^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Соотношение между одномодовой СТ и ТСФ обобщается на двумерный случай. Воспользуемся выражением для ядра

$$w_p(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(X_1+X_2-\boldsymbol{\mu}\mathbf{q}-\boldsymbol{\nu}\mathbf{p})} L_{\mathbf{n}} \left(\frac{\boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\nu}^2}{2} \right) w_s(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) dX_1 dX_2 d\mu_1 d\nu_1 d\mu_2 d\nu_2 \quad (4.78)$$

и получим новое соотношение между двумерными полиномами Эрмита и полиномами Лагерра:

$$\begin{aligned}
w_\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \frac{e^{\frac{1}{2} \mathbf{Q}_0 \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{Q}_0}}{2^{n_1+n_2} \mathbf{n}!} |H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y})|^2 e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0) \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} (\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0)} = \\
= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}}} \times \\
\times \int d\mathbf{X} d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\nu} e^{i(X_1+X_2-\boldsymbol{\mu}\mathbf{q}-\boldsymbol{\nu}\mathbf{p})} L_{n_1} \left(\frac{\mu_1^2 + \nu_1^2}{2} \right) L_{n_2} \left(\frac{\mu_2^2 + \nu_2^2}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)},
\end{aligned} \tag{4.79}$$

где введен вектор $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$, а $H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y})$ представляют собой полиномы Эрмита двух переменных [135], изученные в [136]. Функции L_{n_i} , $i = 1, 2$ — полиномы Лагерра.

4.6. Основные выводы и результаты

В четвертой главе построена томографическая модель квантовых корреляций между различными модами сжатого вакуума ЭМП. Получены СТ, ТЦМ и ТСФ двухмодового сжатого вакуума ЭМП. Вычислены средние и дисперсии томографических амплитуд X_1 , X_2 и X_c , а также установлены соотношения между ними. Получено явное выражение для ядра перехода от СП $w_s(X)$ к ТСФ $w_\gamma(\alpha, n)$ в одномерном случае. Ядро перехода от СП к ТСФ в случае одной моды обобщено на двухмодовый и многомодовые случаи. Получено соотношение между полиномами Эрмита двух переменных и полиномами Лагерра. Эти результаты опубликованы в работах [140], [141] и докладывались на конференции [146].

Заключение

В диссертации исследуются симплектические (СТ) и оптические томограммы (ОТ), томограммы центра масс (ТЦМ), томограммы счета фотонов (ТСФ) и спиновые томограммы в квантовых системах с непрерывными и дискретными наблюдаемыми. Для систем с дискретными наблюдаемыми задается общая схема построения неравенства вида БКХШ. Для систем с непрерывными наблюдаемыми рассчитаны СТ, ОТ, ТЦМ и ТСФ. С помощью полученных томографических распределений вероятностей проводился анализ корреляционных свойств многокудитных состояний и сжатых состояний вакуума ЭМП.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Построена полная нелокальная томографическая модель неравенств БКХШ и вычислены их верхние границы для многокудитных состояний. В рамках данной модели рассмотрены неравенства БКХШ и установлены параметры их нарушения в области квантовой механики в системах кубит-кубит, кубит-кутрит, кубит-кубит-кубит и кутрит-кутрит. Предложенная модель позволяет вычислить квантовые корреляции параметров измерений наблюдаемых, например, по измерениям значения проекции спинов на различные оси квантования. С помощью построенной томографической модели описания квантовых и классических состояний составных многокудитных систем получены новые неравенства, обобщающие неравенства БКХШ. Данные результаты отражены в публикациях [137] и [138].
2. Для многокудитных состояний определены совместные и относительные томографические энтропии. Численным расчетом показано нарушение энтропийных неравенств классической теории информации в квантовой области. Исследован вопрос совместимости неравенств БКХШ с энтропийными неравенствами и возможность их взаимосвязи. Несмотря на то, что нарушения

неравенств БКХШ и энтропийных неравенств обусловлены одним и тем же квантовым эффектом — квантовыми корреляциями между подсистемами — эти неравенства описывают разные аспекты таких корреляций и не могут быть объединены в единое неравенство. Численный расчет перекрытия областей значений параметров (углов измерений), приводящих к нарушению обоих неравенств показал, что эти неравенства независимы. Эти результаты опубликованы в работе [139].

3. Построена томографическая модель квантовых корреляций между различными модами сжатого вакуума ЭМП. Получены СТ, ТЦМ и ТСФ двухмодового сжатого вакуума ЭМП. Вычислены средние и дисперсии томографических амплитуд X_1 , X_2 и X_c , а также установлены соотношения между ними. Получено явное выражение для ядра перехода от СП $w_s(X)$ к ТСФ $w_\gamma(\alpha, n)$ в одномерном случае. Ядро перехода от СП к ТСФ в случае одной моды обобщено на двухмодовый и многомодовые случаи. Получено соотношение между полиномами Эрмита двух переменных и полиномами Лагерра. Эти результаты опубликованы в работах [140], [141].

Развитые в диссертации томографические методы исследования квантовых состояний снабжают КВТИ инструментами для понимания и расчета корреляционных свойств многокудитных состояний. Полученные результаты для расчета квантовых корреляций и взаимных энтропий составных систем могут применяться в экспериментальной реализации квантовых вычислительных машин. При этом практические результаты диссертации дают конкретные рецепты построения электронных квантовых компьютеров с небольшим числом кубитов и кутритов.

С точки зрения дальнейшего развития томографических методов в квантовой оптике очень перспективными являются различные томографические представления сжатых состояний ЭМП. Во-первых, можно легко объединить квантовые томографии для дискретных и непрерывных систем для полного описания

состояний ЭМП. Это позволит сделать значительный шаг вперед в построении фотонных квантовых компьютеров. Во-вторых, пользуясь результатами диссертации для КВТ состояний сжатого вакуума ЭМП, можно рассчитать верхние пределы неравенств БКХШ для многомодовых состояний ЭМП.

Теоретическим направлением развития полученных результатов будет естественное обобщение построенной нерелятивистской томографической картины состояний ЭМП в область квантовой теории поля. Весьма привлекательно также построение теории информации для квантованных полей. Этот путь дальнейших перспективных исследований открыт благодаря определению взаимной томографической энтропии составных систем.

Приложение А

Математическое дополнение

В Приложении А собраны некоторые вычисления, с помощью которых были получены результаты настоящей диссертации.

Гауссовское состояние для одной моды ЭМП описывается оператором плотности $\hat{\rho}_G = N \exp -\frac{1}{2}G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, где $G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = L_{11}\hat{a}^2 + L_{22}\hat{a}^{\dagger 2} + 2L_{12}\hat{a}^\dagger\hat{a} + D_1\hat{a} + D_2\hat{a}^\dagger$, а постоянная N фиксируется условием нормировки $Tr\hat{\rho} = 1$. Условие эрмитовости оператора плотности приводит к $L_{11} = L_{22}^* = M^*$, $L_{12} = L_{21} = L$, $D_1 = D_2^* = D^*$.

Применяя преобразование Боголюбова (4.3) и затем оператор сдвига, оператор $G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ приводится к каноническому виду $\hat{U}\hat{G}\hat{U}^\dagger = -\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}$, $\hat{U}\hat{\rho}_G\hat{U}^\dagger = Ne^{-\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}}$. После сравнения правых и левых частей полученного уравнения видим, что фаза $\varphi = 0$, а модуль сжатия описывается условием $\tanh 2r = -L/M$. После этого легко получить значение $\phi = \sqrt{L^2 - M^2}$.

Матрицу плотности общего одномодового гауссовского состояния $\hat{\rho}_G$ в координатном представлении можно записать в виде

$$\rho(q, q') = \rho_0 e^{-Aq^2 - Bq'^2 + 2Cqq' + Dq + Eq'},$$

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(A_1 - C_1)^{1/2} \exp -\frac{D_1^2}{2(A_1 - C_1)}.$$
(A.1)

В силу эрмитовости оператора плотности введены обозначения $A = A_1 + iA_2 = B^*$, $D = D_1 + iD_2 = E^*$, $C = C_1$, $A_1 > 0$.

Параметр чистоты (1.5) гауссовского состояния (A.1) равен $\mu = \sqrt{\frac{A_1 - C_1}{A_1 + C_1}}$. Общие чистые состояния (4.6) получаются из (A.1) при $C = 0$, $A = -a$, $D = b$ и постоянной нормировки $N = \rho_0^{1/2}$.

Функция Вигнера общего гауссиана вида (A.1) вычисляется по формуле и оказывается равной

$$W(q, p) = 2\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)M^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0) \right\},$$
(A.2)

где $\mathbf{Q} = (q, p)^T$, а M – дисперсионная матрица для квадратур q, p . Распределение Гиббса [35] получается из общего гауссиана (A.1) при $A_1 = \coth \xi/2$, $A_2 = 0$, $C = 1/\sinh \xi$.

Общая томограмма гауссовского состояния (A.1) вычисляется и приводит к гауссиану (4.23) с параметрами $\langle q \rangle = D_1/2(A_1 - C_1)$, $\langle p \rangle = D_2 - A_2 D_1/(A_1 - C_1)$, $\langle X \rangle = \mu \langle q \rangle + \nu \langle p \rangle$. Дисперсия равна $\sigma_{XX} = \mu^2 \sigma_{qq} + 2\mu\nu \sigma_{qp} + \nu^2 \sigma_{pp}$, где $\sigma_{qq} = 1/4(A_1 - C_1)$, $\sigma_{pp} = (|A|^2 - C^2)/(A_1 - C_1)$, $\sigma_{qp} = A_2/2(A_1 - C_1)$. Для чистых состояний эти выражения переходят в формулы (4.24)–(4.25). Соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона $\det \sigma_{qp} = A_1 + C_1/4(A_1 - C_1) = 1/4\mu^2 \geq 1/4$ автоматически выполняется в силу определения параметра чистоты $\mu \leq 1$ и минимизируется одномерными сжатыми состояниями.

Многомодовое гауссовское состояние получается заменой одномодовых операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ многомодовыми $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N)^T$ и $\hat{\mathbf{a}}^\dagger = (\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger, \dots, \hat{a}_N^\dagger)$.

Многомерные гауссовские интегралы вычисляются с помощью формулы [75]

$$\int e^{-\mathbf{x}A\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \exp \frac{1}{4} \mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь A — положительно определенная n -мерная комплексная матрица, $\mathbf{b}$ является n -мерным комплексным вектором. Волновые функции (4.21) можно привести к каноническому виду преобразованиями $A = -M^{-1}/4$, $\mathbf{b} = i\mathbf{p}_0 + 1/2 \cdot M^{-1}\mathbf{x}_0$.

Если задано некоторое гауссовское распределение вероятностей $w = e^{G(\mathbf{q})}$, $G(\mathbf{q}) = \mathbf{q}L\mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{q}$, то найдется среднее значение $\mathbf{q}_0$ полевой квадратуры $\mathbf{q}$ и дисперсионная матрица $\sigma_{\mathbf{q}\mathbf{q}}$ такие, что многочлен (2.73) может быть приведен к каноническому виду

$$G(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \sigma_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{-1} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (\text{A.4})$$

В самом деле, сравнивая (2.73) и (A.4) величины $\sigma_{\mathbf{q}\mathbf{q}}$ и $\mathbf{q}_0$ могут быть однозначно определены $\sigma_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = -L^{-1}/2$, $\mathbf{q}_0 = \sigma_{\mathbf{q}\mathbf{q}}\boldsymbol{\omega} = -L^{-1}\boldsymbol{\omega}/2$.

Приведем для справок выражения для некоторых матричных элементов, которые многократно использовались в диссертации. Расцепляя по формуле Бейкера-Кэмбелла-Хаусдорфа операторную экспоненту, можно написать

$$\begin{aligned}\langle y|e^{-ik(\mu\hat{q}+\nu\hat{p})}|x\rangle &= e^{-i\frac{k\mu}{2}(x+y)}\delta(y-x-k\nu) = \\ &= \frac{1}{|\nu|}e^{i\frac{\mu}{2\nu}x^2}e^{-i\frac{\mu}{2\nu}y^2}\delta\left(k-\frac{y-x}{\nu}\right).\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

В частности, для матричных элементов оператора сдвига получаем $\langle y|\hat{D}(\alpha)|x\rangle = \exp \frac{ip}{2}(x+y)\delta(y-x-q)$. Приведем также формулу для матричного элемента дельта-функции Дирака

$$\langle y|\delta(X-\mu\hat{q}-\nu\hat{p})|x\rangle = \frac{1}{2\pi|\nu|}\exp i\left(\frac{\mu}{2\nu}x^2-\frac{X}{\nu}x-\frac{\mu}{2\nu}y^2+\frac{X}{\nu}y\right). \quad (\text{A.6})$$

Для получения формулы (A.6), очевидно, мы воспользовались формулой (A.5). Перейдем теперь к описанию вывода выражения для СП сжатого двухмодового вакуумного состояния поля. Обозначив $Y_i = X_i/\nu_i$, перепишем $\boldsymbol{\omega}$ в виде $\boldsymbol{\omega} = -i(\mathbf{Y} - \mathbf{b}_2 + i\mathbf{b}_1)$. Поскольку конечное выражение будет представлять с собой распределение вероятностей, нормировочные постоянные определим после получения томограммы. По формуле (A.3) получаем $w_s(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \propto \exp G(\boldsymbol{\omega}) = \exp -\frac{1}{2}\text{Re}(\boldsymbol{\omega}^T S \boldsymbol{\omega})$, где мы ввели комплексную матрицу с действительной и мнимыми частями $S = L^{-1} = (A + i\Lambda)^{-1} = S_1 + iS_2$. После отделения действительной части выражение стоящее в экспоненте преобразуется к виду

$$G(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}((\mathbf{Y} - \mathbf{b}_2)S_1(\mathbf{Y} - \mathbf{b}_2) - 2(\mathbf{Y} - \mathbf{b}_2)S_2\mathbf{b}_1). \quad (\text{A.7})$$

Преобразуем (A.7) к каноническому виду, положив $\sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = -S_1^{-1}$ и $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{b}_2 + S_1^{-1}S_2\mathbf{b}_1$, и получим $G = -\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^T \sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)$.

Характеристики Y_{0i} , $\sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$ связаны с характеристиками квадратур X_i , X_k соотношениями $\langle X_i \rangle = \nu_i \langle Y_i \rangle$, $\sigma_{X_i, X_k} = \nu_i \nu_k \sigma_{Y_i, Y_k}$. В этих формулах нет суммирования. Подставляя выражения исходных томографических величин X_i , X_k получаем СТ (4.49).

Определитель дисперсионной матрицы $\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \nu_1^2 \nu_2^2 \det \sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$ является положительно определенной билинейной функцией от векторов $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$. Выраженная через коэффициенты A , B , C , D , E условие положительности $\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} > 0$ приводит к СНШР для двухмодового сжатого вакуум ЭМП.

Поясним теперь вывод ТЦМ (4.55). Сначала получим интегральное представление матричного элемента двумерной дельта функции, фигурирующего в определении для ТЦМ (4.54). Используя (A.6) можем записать

$$\langle y_1 y_2 | \delta(X - \boldsymbol{\mu} \hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\nu} \hat{\mathbf{p}}) | x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikX} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x} - k\boldsymbol{\nu}) e^{i(\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y})}. \quad (\text{A.8})$$

Видно, что в интеграле (A.8) из-за наличия дельта-функции остаются только те значения k , которые равны $k = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x})/\boldsymbol{\nu}^2$. Поэтому интегрирование по компоненте Фурье k легко производится, и мы получаем замкнутую формулу для томограммы центра масс

$$w_c(X, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\pi} \left| \int d\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \exp i \left(\mathbf{x}^T \Lambda \mathbf{x} - \frac{X}{\boldsymbol{\nu}^2} \boldsymbol{\nu} \mathbf{x} \right) \right|^2. \quad (\text{A.9})$$

Глядя на интеграл (A.9), заметим, что структура формулы везде аналогична СП (4.48), однако связь между вспомогательной амплитудой $\mathbf{Y}$ и исходными квадратурами $\mathbf{X}$ теперь задается формулой $\mathbf{Y} = \frac{X}{\boldsymbol{\nu}^2} \boldsymbol{\nu}$. Очевидно, интеграл (A.9) представляет с собой некое гауссовское распределение для величины $\mathbf{Y}$.

Для средней и дисперсии можно сразу написать формулы $\langle X \rangle_c = X_0 = \boldsymbol{\nu} \mathbf{Y}_0 = \nu_i \langle Y_i \rangle$, $\sigma_{XX} = \langle X^2 \rangle_c = \sum_{ik=1,2} \nu_i \nu_k \sigma_{Y_i Y_k}$. Подставляя эти выражения в (A.4) окончательно получим

$$G(X) = -\frac{1}{2} (X - X_0) \frac{\boldsymbol{\nu} \sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{-1} \boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\nu}^4} (X - X_0) = -\frac{1}{2} \frac{(X - X_0)^2}{\sigma_{XX}}. \quad (\text{A.10})$$

Таким образом, мы доказали, что распределение вероятностей томографической величины (4.53) $X = X_c$ действительно гауссово.

Диагональный элемент вейловского оператора сдвига в базисе задается полиномами Лагерра. В самом деле, пользуясь таблицами [75] определением $L_n^{(0)}(x) =$

$L_n(x)$, получаем

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{D}(\beta)|n\rangle &= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2^n n!} e^{-\frac{q^2+p^2}{4}} \int dt e^{-t^2} H_n\left(t + \frac{q+ip}{2}\right) H_n\left(t - \frac{q-ip}{2}\right) = \\ &= e^{-\frac{q^2+p^2}{4}} L_n\left(\frac{q^2+p^2}{2}\right) = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} L_n(|\beta|^2).\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Здесь $L_m^{(n)}(x)$ — т.н. обобщенные полиномы Лагерра, а $L_m(x)$ — обозначают просто полиномы Лагерра, определения которых можно найти, например, в [75]. Из структуры формулы (A.11), очевидно, как рассчитать недиагональные матричные элементы.

Пусть $\mathbf{m} = m_1, \dots, m_N$, $\mathbf{n} = n_1, \dots, n_N$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$, $m_i, n_i = 0, 1, \dots$. Для многомерных полиномов Эрмита [135], [136] имеется формула

$$\int d\mathbf{x} H_{\mathbf{m}}^{\{S\}}(\mathbf{x}) H_{\mathbf{n}}^{\{T\}}(\Lambda\mathbf{x} + \mathbf{d}) \exp(-\mathbf{x}M\mathbf{x} + \mathbf{c}\mathbf{x}) = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det M}} \exp\left(\frac{1}{4}\mathbf{c}M^{-1}\mathbf{c}\right) H_{\mathbf{mn}}^{\{R\}}(\mathbf{y}), \quad (\text{A.12})$$

где симметричная $2N \times 2N$ — матрица

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

с $N \times N$ -блоками R_{11} , R_{22} , R_{12} выражается симметричными $N \times N$ -матрицами S , T , M и $N \times N$ -матрицей Λ вида $R_{11} = S - \frac{1}{2}SM^{-1}S$, $R_{22} = T - \frac{1}{2}T\Lambda M^{-1}\Lambda^T T$, $R_{12}^T = -\frac{1}{2}T\Lambda M^{-1}S$. $2N$ -мерный вектор $\mathbf{y}$ выражается N -мерными векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ формулой $\mathbf{y} = R^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^T$, где N -мерные векторы $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ есть $\mathbf{z}_1 = \frac{1}{4}(SM^{-1} + M^{-1}S)\mathbf{c}$ и $\mathbf{z}_2 = \frac{1}{4}(T\Lambda M^{-1}M^{-1}\tilde{\Lambda}T)\mathbf{c} + T\mathbf{d}$. Покажем теперь каким образом получается выражение (4.43) для одномодовой и выражение (4.74) для двухмодовой ТСФ.

В случае одномодовой ТСФ аналогичная экспонента (A.7) гласит

$$2S_1 = -\frac{(2a_1 - 1)(b_1^2 - b_2^2) + 4a_2b_1b_2}{\varepsilon} + \mathbf{q}L\mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{q}. \quad (\text{A.14})$$

Параметры, входящие в выражение для одномодовой ТСФ, задаются формулами

$$L = \begin{pmatrix} 1 - 2a_1 - \varepsilon & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & 2a_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 4a_1^2 - 4a_1 + 4a_2^2 + 1, \quad (\text{A.15})$$

а действительный вектор $\boldsymbol{\omega} = (b_1 - 2a_1b_1 - a_2b_2, b_2 - 2a_1b_2 + a_2b_1)^T$. Они входят в томограмму в виде постоянных $M = -4L/\varepsilon$, $\boldsymbol{\alpha}_0 = -\sqrt{2}L^{-1}\boldsymbol{\omega}/4$. Параметры входящие в ТСФ двухмодового сжатого вакуума (4.79) даются формулами $M = \frac{1}{2} - A$, $\sigma = V_1^{-1}/2$. Здесь V_1 является блочной матрицей размера 4×4

$$V_1 = Re \begin{pmatrix} -4A(1 + M^{-1}A) & 2iAM^{-1} \\ 2iAM^{-1} & M^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Матрица R и вектор $\mathbf{y}$ определяют аргументы двумерного многочлена Эрмита

$$\begin{cases} R = 1 - \frac{1}{2}M^{-1}, \\ \mathbf{y} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}M^{-1}\right)^{-1} M^{-1}(\mathbf{b} + 2A\mathbf{q} - i\mathbf{p}). \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Вектор $\mathbf{Q}_0$ задается формулой $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}_1 - V_1^{-1}V_2\mathbf{R}_2$, где введен комплексный вектор

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + i\mathbf{R}_2 = 2V^{-1} \begin{pmatrix} (1 + M^{-1}A)\mathbf{b} \\ iM^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Список литературы

1. Richard Feynman, *International Journal of Theoretical Physics*, **21**, 467, (1982), DOI: 10.1007/BF02650179.
2. Gregg Jaeger, “*Quantum Information: An Overview*”, Springer, Berlin, (2007), ISBN 978-0-387-35725-6.
3. L. Vaidman, *Phys. Rev. A*, **49**, 1473-1476, (1994).
4. C. H. Bennett, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3121, (1992).
5. John A. Wheeler and Wojciech Hubert Zurek (eds), “*Quantum Theory and Measurement*”, Princeton University Press, (1983), ISBN 0-691-08316-9.
6. Paul Busch, Pekka Johannes Lahti, Peter Mittelstaedt, “*The Quantum Theory of Measurement*”, Springer, New York, (1991), ISBN 3-540-54334-1.
7. A. S. Holevo, “*Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*”, North-Holland Series in Statistics and Probability, Vol. 1, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1982), ISBN 0-444-86333-8.
8. Y.-H. Kim, S. P. Kulik and Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1370, (2001).
9. M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, D. J. Wineland, *Nature*, **429**, 737, (2004).
10. A. Aspect, P. Grangier and G. Roger “*Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem*”, *Phys. Rev. Lett.* 47, 460–463, (1981).
11. A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1804, (1982).
12. C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.*, **27**, (1948).

13. William Feller, “*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*”, Vol. 1, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., (1968), ISBN: 978-0-471-25708-0.
14. S. Mancini, V. I. Man’ko and P. Tombesi, *Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, 615-624 (1995).
15. S. Mancini, V. I. Man’ko and P. Tombesi, *Phys. Lett. A*, **213**, 1-2 1–6, (1996).
16. O. V. Manko, *J. Russ. Laser Res.*, **17**, 5, 439–448, (1996).
17. S. Mancini, V. I. Man’ko and P. Tombesi, *Found. Phys.*, **27**, 801–824, (1997).
18. O. V. Man’ko and V. I. Man’ko, *J. Russ. Laser Res.*, **18**, 5, 407–444, (1997).
19. M. A. Man’ko, V. I. Man’ko and R. Vilela Mendes; *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, Number 40, 8321, (2001), DOI: 10.1088/0305-4470/34/40/309.
20. V. I. Man’ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys.Lett.A*, **372**, 6490-6497, (2008), DOI: doi:10.1016/j.physleta.2008.07.085.
21. A. Ibort, V. I. Man’ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**, 065013, (2009), DOI: 10.1088/0031-8949/79/06/065013.
22. E. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**, 749, (1932).
23. H. Weyl, “*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*”, Dover Publications, Inc., New York, (1931), ISBN 486-60289-9.
24. M. A. Man’ko, V.I. Man’ko and R.V. Mendes, *J. Russ. Laser Res.* **27**, 507-532, (2006).
25. V. I. Man’ko, L. Rosa, P. Vitale, *Phys.Lett. B*, **439**, 328-336, (1998).
26. A. B. Klimov, O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 6101, (2002), DOI: 10.1088/0305-4470/35/29/312.

27. S. Mancini, P. Tombesi, V. I. Man'ko, P. Kasperkovitz, D. Grau (eds.), *“Proceedings of the 5th Wigner Symposium”*, (Vienna, 25-29 August 1997), 410–412, World Scientific, Singapore, (1998).
28. V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, A. Stern, E. C. G. Sudarshan, F. Ventriglia, *Phys. Lett. A*, **351**, 1-2, 1–12, (2006).
29. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, **23**, 48, 807-812; 49, 823-828; 50, 844-849 (1935), DOI: 10.1007/BF01491891.
30. E. Schrödinger, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **31**: 555–563, (1935), **32**: 446–451, (1936).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *“Квантовая механика: Нерелятивистская теория”*, М.: Наука, (1989).
32. Paul A. M. Dirac, *‘Principles of Quantum Mechanics’*, 4th Ed., Oxford University Press, (1958).
33. J. J. Sakurai, *‘Modern Quantum Mechanics’*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1994).
34. N. N. Bogoliubov, N. N. Bogoliubov, Jr., *“Introduction to Quantum Statistical Mechanics”*, World Scientific, (1982).
35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *“Статистическая Физика. Часть 1”*, М.: Наука, (1989).
36. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **229**, 335, (1997), DOI:10.1016/S0375-9601(97)00199-0.
37. V. I. Man'ko, S. S. Safonov, *Teor. Mat. Fiz.*, 112:3, 467–478, (1997).
38. V. I. Man'ko and O. V. Man'ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **112**, JETP 1, (1997).

39. V. I. Man'ko and G. Marmo, *Phys. Scr.*, **60**, (1996).
40. O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and G. Marmo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 699, (2002).
41. O. V. Man'ko, V. I. Man'ko and G. Marmo, *Phys. Scr.*, **62**, No. 6, 446-452, (2000).
42. J. S. Bell, *Physics*, **1**, 195, (1964).
43. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 880, (1969).
44. J. S. Bell, '*Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*', Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
45. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Zeilinger, "Going beyond Bell's theorem" in "*Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*", M. Kafatos (ed.), Dordrecht-Boston-London: Kluwer, 69-72, (1989).
46. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.*, **58**, 1131, (1990).
47. Alfred Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221-260, (1978).
48. N. J. Cerf, C. Adami, *Phys.Rev.Lett.*, **79**, 5194, (1997).
49. Martin B. Plenio, S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.*, **7**, 1, (2007).
50. N. J. Cerf, C. Adami, *Phys. A*, **55**, 3371, (1997).
51. Emilio Santos, *Phys. Rev. A*, **69**, 622-627, 022305, (2004).
52. V. V. Dodonov, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **4**, 1, (2002), DOI: 10.1088/1464-4266/4/1/201.

53. V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, *Phys. Rev. A*, **49**, 2993-3001, (1994).
54. O. V. Man'ko and G. Schrader, *Phys. Scr.*, **58**, 228, (1998).
55. W. P. Schleich, '*Quantum Optics in Phase Space*', Wiley (2001).
56. J. C. Garrison and R. Y. Chiao, '*Quantum Optics*', Oxford University Press Inc., New York, (2008).
57. G. Schrader, V. M. Akulin, V. I. Man'ko and W. P. Schleich, *Phys. Rev. A*, **48**, 2398–2406, (1993).
58. G. J. Milburn, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 4, 737, (1984), DOI: 10.1088/0305-4470/17/4/015.
59. L. Mandel and E. Wolf, '*Optical Coherence and Quantum Optics*', Cambridge University Press, (1995).
60. R. J. Glauber, '*Quantum Theory of Optical Coherence, Selected Papers and Lectures*', Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim, (2007), ISBN: 978-3-527-40687-6.
61. S. Wallentowitz and W. Vogel, *Phys. Rev. A*, **53**, 4528-4533, (1996).
62. G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **8**, 5, 1017–1027, (1996).
63. J. Radon, *Mathematische-Physikalische Klasse*, Breichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, **69**, 262–277, (1917).
64. V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, E. C. G. Sudarshan, F. Ventriglia, *Rept. Math. Phys.*, **61**, 337-359, (2008).

65. J. E. Moyal, “*Quantum mechanics as a statistical theory*”, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **45**, 99–124, (1949).
66. J. von Neumann, “*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*”, Springer-Verlag, Berlin, (1932), ISBN 3-540-59207-5.
67. L. D. Landau, *Z. Physik*, **45**, 430, (1927).
68. R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **131**, 2766–2788, (1963),
DOI:10.1103/PhysRev.131.2766.
69. E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277, (1963).
70. R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 84-86, (1963),
DOI:10.1103/PhysRevLett.10.84.
71. K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22**, 264-314, (1940).
72. Y. Kano, *J. Math. Phys.*, **6**, 1913, (1956).
73. O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, G. Marmo, P. Vitale, *Phys.Lett.A*, **360**, 522-532, (2007) DOI:10.1016/j.physleta.2006.08.057.
74. V. I. Man’ko and R. V. Mendes, *Phys. Lett. A*, **263**, 53-61, (1999).
75. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, Academic Press, New York, (1965).
76. K. Banaszek and K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4344-4347, (1996).
77. S. Mancini, P. Tombesi and V. I. Man’ko, *Europhys. Lett.*, **37**, 2, 79–83, (1997).
78. K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1882-1902, (1969).
79. Vladimir I. Man’ko, Giuseppe Marmo, E. C. George Sudarshan *Phys. Scr.*, 014035, (2009), DOI: 10.1088/0031-8949/2009/T135/014035.

80. T. M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of information theory*, John Wiley and Sons, Inc., New Work, (1991).
81. W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature*, **299**, 802–803, (1982).
82. O. V. Man’ko, V. I. Man’ko and O. V. Pilyavets, *J. Russ. Laser Res.*, **26**, 6, 429–444, (2005).
83. R. A. Horn, C. H. Johnson, *”Matrix Analysis”*, Cambridge Press, (1993), ISBN 0-7923-2549-4.
84. V. N. Chernega and V. I. Man’ko, *J. Russ. Laser Res.*, **28**, 2, (2007).
85. V. I. Man’ko and O. V. Man’ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **112**, 3(9), 796–804, (1997), [JETP, 85:3 430–434 (1997)].
86. M. O. Terra Cunha, V. I. Man’ko, M. O. Scully, *Found. Phys. Lett.*, **14**, 2 103–117, (2001).
87. A. R. Edmonds, *”Angular momentum in quantum mechanics”*, Princeton University Press, Princeton, (1996).
88. Asher Peres, *”Phys. Rev. Lett.”*, **77**, 1413–1415, (1996), DOI:10.1103/PhysRevLett.77.1413.
89. M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Physics Letters A*, **210**, (1996).
90. R. F. Werner, *Physical Review A*, **40**(8), 4277–4281, (1989).
91. R. Blatt and D. Wineland, *Nature*, **453**, 7198, 1008–1015, (2008).
92. S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man’ko and V. I. Man’ko, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 6, 95–104, (2003), DOI: 10.1088/1464-4266/5/1/313.

93. S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, *European Physical Journal B*, **52**, 2, 191-198, (2006), DOI: 10.1140/epjb/e2006-00280-0.
94. V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, O. V. Pilyavets and V. G. Zborovskii, *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 2, 132–166, (2006).
95. C. Lupo, V. I. Man'ko, G. Marmo, *J.Phys.A*, **40**, 99, 13091-13100, (2007).
96. G. I. Taylor, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **15**, 114, (1909).
97. P. Grangier, G. Roger and A. Aspect, *Europhys. Lett.*, **1**, 173, (1986).
98. C. K. Hong, Z. Y. Ou and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2044, (1987).
99. P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4763, (1995).
100. A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**, 777-780, (1935).
101. F. Selleri, “*Quantum Mechanics Versus Local Realism: The Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*”, Plenum Press, New York, (1988), ISBN 0-306-42739-7.
102. D. Bohm, “*Quantum Theory*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 611-623, (1951).
103. D. Bohm, *Phys. Rev.*, **85**, 166, (1952).
104. D. Bohm, Y. Aharonov, *Phys. Rev.*, **108**, 1070-1076, (1957).
105. B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.*, **4**, 93, (1980).
106. S. J. Freedman, J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 938–941, (1972).
107. G. Weihs, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5039, (1998).
108. Yi-Bing Ding, Junli Li, Cong-Feng Qiao, *High Ener. Phys. and Nucl. Phys.*, **31**, 1086, (2007).

109. N. Gisin, *Phys. Lett. A*, **154**, 5-6, 201-202, (1991).
110. Asher Peres, *Foundations of Physics*, **29**, 589-614, (1999).
111. Marek Zukowski, Caslav Brukner, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 210401, (2002).
112. D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 040404-1, (2002).
113. Daniel Collins, Nicolas Gisin, Sandu Popescu, David Roberts, Valerio Scarani, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 170405, (2002).
114. Yu-Chun Wu, Piotr Badziag, Marcin Wies'niak, Marek Zukowski, *Phys. Rev. A*, **77**, 032105, (2008).
115. V. A. Andreev and V. I. Man'ko, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **2**, 2, 122-125, (2000).
116. V. A. Andreev and V. I. Man'ko, *Phys. Lett. A*, **281**, 5-6, 278-288, (2001).
117. C. Lupo, V. I. Man'ko, G. Marmo, *J.Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 12515-12524, (2006).
118. V. A. Andreev, V. I. Man'ko, O. V. Man'ko and E. V. Shchukin, *Theoretical and Mathematical Physics*, **146**, 1, 140-151, (2006), DOI: 10.1007/s11232-006-0014-8.
119. Reinhard F. Werner, Michael M. Wolf, *Phys. Rev. A*, **61**, 062102, (2000).
120. Ch. F. Wildfeuer, J. P. Dowling, *Phys. Rev. A*, **78**, 032113, (2008).
121. Itamar Pitowsky, *Journal of Mathematical Physics*, **49**, 012101, (2008).
122. Vladimir I. Man'ko and Aleksey A. Shchekin, *Journal of Russian Laser Research*, **28**, Number 3, 255-266, DOI: 10.1007/s10946-007-0014-7.

123. I. B. R. Mollow and R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **160**, 1076–1096, (1967).
124. D. F. Walls, *Nature*, **306**, 141-146, (1983), DOI:10.1038/306141a0.
125. R. E. Slusher et al., *Phys. Rev. Lett.*, **55**, (22), 2409, (1985).
126. L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 691, (1986).
127. G. Breitenbach, S. Schiller and J. Mlynek, *Nature*, **387**, 471, (1997).
128. H. Vahlbruch et al., *Phys. Rev. Lett.*, **25**, (2008).
129. C. M. Caves, *Phys. Rev. D*, **23**, 1693-1708, (1981),
DOI: 10.1103/PhysRevD.23.1693.
130. L. A. Wu, M. Xiao, H. J. Kimble, *JOSA B*, **4**, 10, 1465-1475 (1987).
131. Carlton M. Caves and Bonny L. Schumaker, *Phys. Rev. A*, **31**, 3068–3092, (1985),
DOI:10.1103/PhysRevA.31.3068.
132. A. S. Arkhipov, Yu. E. Lozovik and V. I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **24**, 3, 237-255 (2003) DOI: 10.1023/A:1024051809262.
133. A. S. Arkhipov, Yu. E. Lozovik and V. I. Man'ko, *Physics Letters A*, **328**, 6, 419-431, (2004), DOI:10.1016/j.physleta.2004.06.039.
134. A. S. Arkhipov and V. I. Man'ko, *Phys. Rev. A*, **71**, 1, 012101, (2005).
135. *Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions*, Volumes 1, 2, 3, edited by A. Erdrelyi, McGraw-Hill, New York, (1953).
136. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *J. Math. Phys.*, **35**, 4277, (1994).

Список публикаций по теме диссертации

Публикации:

- 137. L. V. Akopyan and V. I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **30**, 1, 82-100, (2009), DOI: 10.1007/s10946-009-9052-7.
- 138. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **30**, 4, 338-358, (2009), DOI: 10.1007/s10946-009-9084-z.
- 139. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, D. K. Udumyan, *Journal of Russian Laser Research*, **31**, 1, 61-69, (2010), DOI: 10.1007/s10946-010-9124-8.
- 140. L. V. Akopyan and V. I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **40**, 6, (2010), DOI: 10.1007/s10946-010-9174-y.
- 141. L. V. Akopyan and V. I. Man'ko, *Journal of Optics and Spectroscopy*, (2010), принято к печати.
- 142. Л. В. Акопян, В. И. Манько, “Вероятностное представление квантовых состояний”, Учебное пособие, МФТИ (2010).

Материалы конференций:

- 143. Л. В. Акопян, “Полугруппы и вероятностное представление квантовой механики”, Ежегодная научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, (2009).
- 144. Л. В. Акопян, “Неравенства Белла и квантовая томография”, Летняя школа ТМФ, Секция “Теоретическая Математическая Физика”, г. Долгопрудный, (2010).
- 145. L. V. Akopyan, “Bell-type inequalities and Upper bounds of multi-qudit states”, Poster presentation in XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information, Kyiv, Ukraine (2010).

146. L. V. Akopyan, “*Quantum Tomography of Multi-mode Squeezed Vacuum States of Light*”, Poster presentation in Laser Physics 2010 International Conference, Ashtarak, Armenia (2010).